Elementarni zadaci iz **Euklidske geometrije II**

Sličnost trouglova

1. Neka su dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q, a k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1, O_3)$ date su tačke M i N takve da $M \in k_1$, $N \in k_3$ i važi poredak $M - O_1 - O_3 - N$. Neka je $\{T\} = p(O_1, O_3) \cap p(P, Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

2. Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$ $(AB < BC)$, tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je $\triangle PAI$ jkk, da važi poredak $P - M - S$ i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka polupravе $pp[P, S)$ i kruga k dokazati da je $\triangle AMP \sim \triangle NAP$ i da je $\triangle PIN \sim \triangle PMI$.

3. Neka su dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q, a k_1 i k_2 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1, O_2)$ date su tačke M i N takve da $M \in k_1$, $N \in k_3$ i važi poredak $M - O_1 - O_3 - N$. Neka je $\{T\} = p(O_1, O_2) \cap p(P, Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

4. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza $(BC = a,\ AC = b,\ AB = c)$. Dokazati da je $a^2 + b^2 = c^2$.

Talesova teorema

1. Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da je $C_1D = \frac{1}{2}h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

2. Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\measuredangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB. Dokazati da je $\frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$.

Omjeri u trouglu

1. U trouglu $\triangle ABC$ je $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$. Dokazati da prava koja sadrži poluprečnik BS (S je centar opisane kružnice $\triangle ABC$) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1 : 2$ računajući od vrha A.

2. Ako jednakostraničnom trouglu $\triangle ABC$ (stranice a) svaku stranicu produžimo za a, dobijemo trougao $\triangle A_1B_1C_1$. U kojem omjeru se nalaze površine trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$.

3. Dokazati da težište trougla dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

4. Centar upisanog kruga u jednakokrakom trouglu dijeli visinu u odnosu $12:5$. Ako je dužina kraka trougla $60\,cm$, naći dužinu osnovice tog trougla.

5. Dokazati da težište trougla dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

Deltoid

1. Deltoid je upisan u krug k_1. Kraća dijagonala dijeli dužu na odsječke $37\,cm$ i $54\,cm$. Nad tim odsječcima kao nad prečnicima konstruisani su krugovi k_2 i k_3. Naći površinu $P = P_{k_1} - P_{k_2} - P_{k_3}$, označiti na slici šta predstavlja ova površina i odrediti dužinu kraće dijagonale BD.

Crtanje duži

1. Date su duži a i b $(b < 1 < a)$. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2$.

2. Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2} + 1 = \dfrac{\sqrt{3a} - a^2}{\sqrt{b}}$, gdje je $a < 1 < b$.

3. Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{3} + ab}{\sqrt{ab}} - 1$, gdje su a i b date duži $(a < 1 < b)$.

4. Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

5. Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}$.

Trigonometrija

1. (Kosinusna teorema) Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\alpha$.

2. Neka je $\square ABCD$ paralelogram kod koga su $AB = a$, $BC = b$, $AC = p$ i $BD = q$. Dokazati da vrijedi jednakost $p^2 + q^2 = 2a^2 + 2b^2$ (uputa: iskoristiti kosinusnu teoremu).

Konstrukcije četverouglova

1. Dat je $\triangle ABC$ i data je duž DE. Konstruisati pravougaonik čija je površina jednaka površini trougla $\triangle ABC$ i čija je jedna stranica jednaka dužini duži DE.

Konstrukcije trougla

1. Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove visine leže na datim pravama.

Računanje površine tijela u ravni

1. Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

1. Površina pravouglog trougla $\triangle ABC$ se računa po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

Krug

1. Neka je k krug koji je opisan oko trougla $\triangle ABC$, $AB < AC$ i neka je tačka N središte luka AC (kojem pripada i tačka B) kruga k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačka presjeka prave $p(N, M)$ i opisanog kruga. Dokazati da je NP prečnik opisanog kruga.

2. Date su prave t, q i s takve da $q \perp t$, $s \perp t$, $s \cap t = \{Q\}$ i $q \cap t = \{P\}$. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ takvi da je $O_1 \in s$, $s \cap k_1 = \{M, N\}$ i $Q - M - N$, $O_2 \in q$, k_2 dodiruje krug k_1 u tački E i k_1 dodiruje pravu t u tački P. Dokazati da je $PN \cap O_1O_2 = \{E\}$.

3. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ koji se dodiruju u tački E i dat je krug $k_3(O_3, r_3)$ takav da siječe krug k_1 u tačkama P i Q, a krug k_2 u tačkama M i N. Ako sa S označimo presjek pravih $p(P, Q)$ i $p(M, N)$ dokazati da je $p(S, E)$ tangenta na krug k_1 i na krug k_2.

Konstrukcija prave u zadacima u kojima se pojavljuje i krug

1. Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

2. Date su dvije podudarne kružnice k_1 i k_2 i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsjecaju podudarne tetive.

3. Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Konstrukcija kruga

1. Data je prava t i tačke $A, B \notin t$ takve da $p(A,B)||t$. Konstruisati krug kroz tačke A i B koja dodiruje datu pravu t.

2. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu u datoj tački.

Razni zadaci

1. Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Na stranici BC data je tačka D takva da $C_1D \perp BC$ i $C_1D = \frac{1}{2}AA'$. Diskutovati da li se tačka D može dobiti kao presjek dva kruga čiji se poluprečnici mogu izraziti preko h_a, h_c ili t_c.

2. Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB $(A, B \in k,\ S \in AB)$. Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

3. Zadani su ugao $\measuredangle ACB$, poluprava CM unutar ugla $\measuredangle ACB$ i poluprava CS koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je $\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB)$.

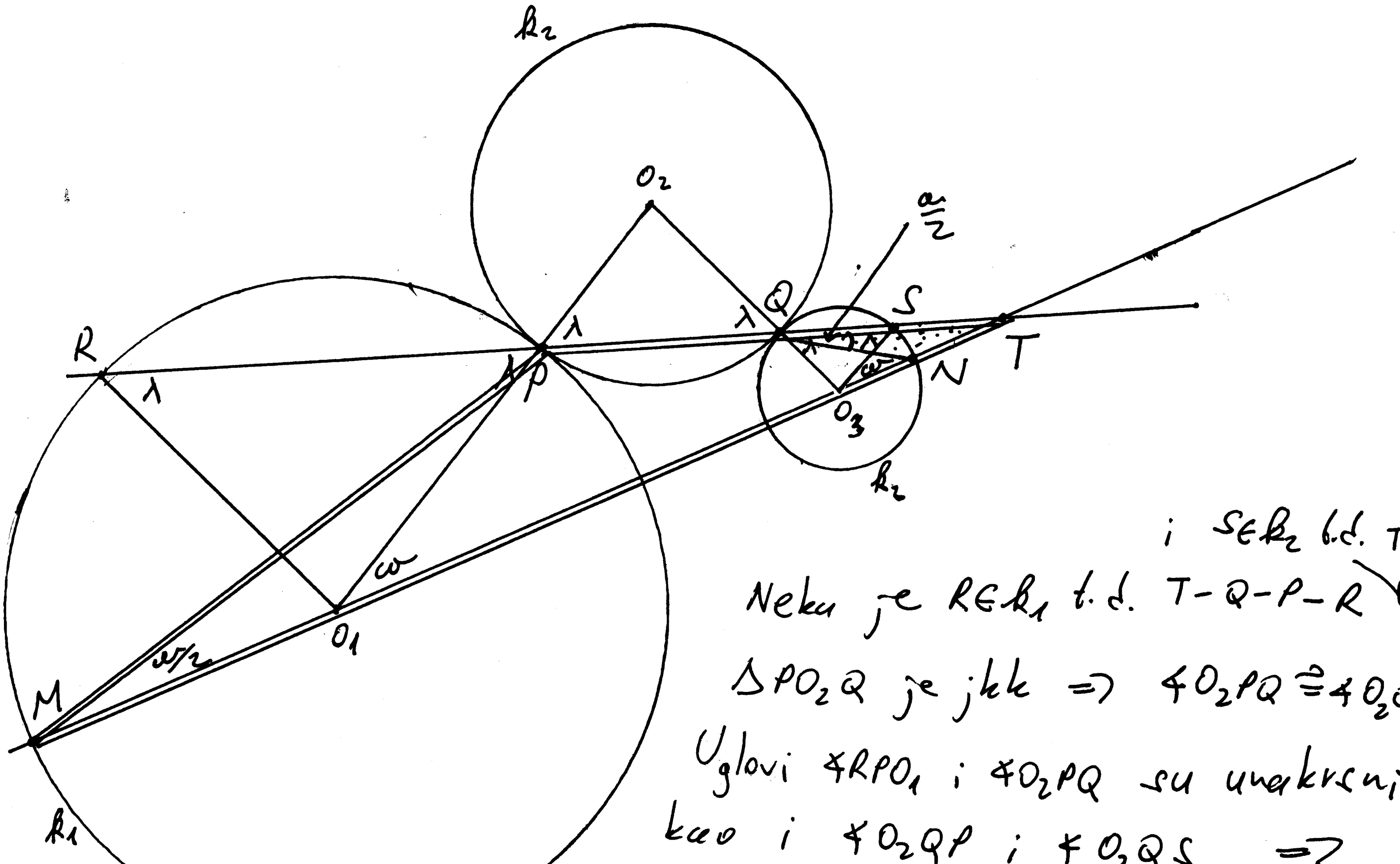
4. Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

5. U trouglu $\triangle ABC$ je $AC = BC$, a visina AD sa simetralom AE $(E \in BC)$ ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od $30°$. Naći uglove trougla $\triangle ABC$ i dokazati da je $AE = EC$.

6. Na kraku x ugla $\measuredangle xOy$ data je tačka A. Konstruisati na kraku y tačku B, tako da je $\measuredangle OAB = 3\measuredangle OBA$.

Neka su dati krugovi $k_1(O_1,r_1)$, $k_2(O_2,r_2)$ i $k_3(O_3,r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q i k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1,O_2)$ date su tačke M i N takve da $M\in k_1$, $N\in k_3$ i važi poredak $M-O_1-O_2-N$. Neka je $\{T\} = p(O_1,O_2)\cap p(P,Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

Rj.



Neka je $R\in k_1$ t.d. $T-Q-P-R$ i $S\in k_2$ t.d. $T-S-Q$

$\triangle PO_2Q$ je jkk $\Rightarrow \angle O_2PQ \cong \angle O_2QP = \lambda$.

Uglovi $\angle RPO_1$ i $\angle O_2PQ$ su unakrsni kao i $\angle O_2QP$ i $\angle O_3QS$ $\Rightarrow$

$\angle RPO_1 = \lambda = \angle SQO_3$

Kako su $\triangle PO_1R$ i $\triangle SO_3Q$ jkk $\Rightarrow \angle PRO_1 = \lambda$ i $\angle QSO_3 = \lambda$

Ako posmatramo $p(S,R)$ i primjetimo da je $\angle RSO_3 \cong \angle RPO_1 = \lambda$

$\Rightarrow PO_1 \parallel SO_3$

$PO_1 \parallel SO_3$ i $p(M,N)$ transferzala $\Rightarrow \angle SO_3T \cong \angle PO_1T = \omega$.

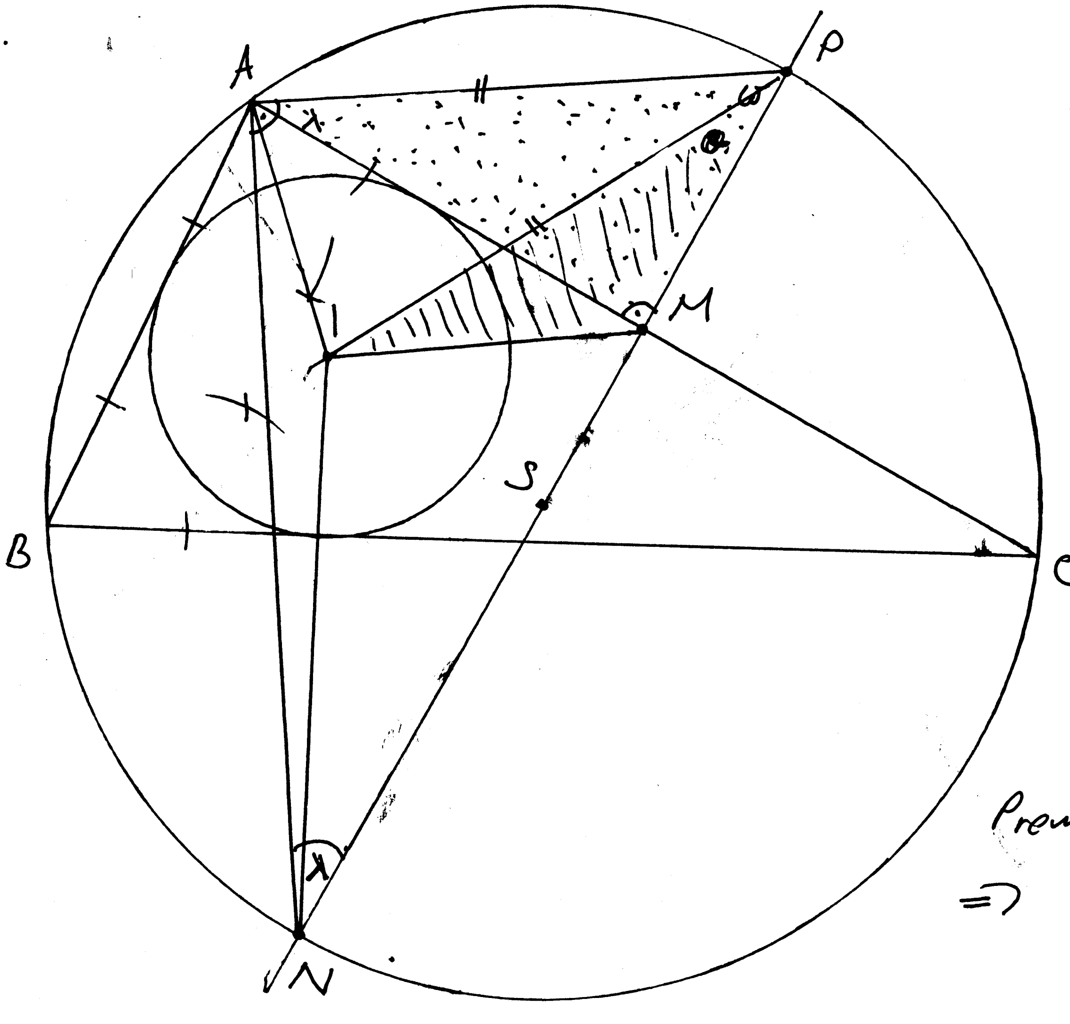
Ovo su dva centralna ugla nad lukom kojima odgovaraju periferijski $\angle O_1MP$ i $\angle NQS$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} \angle QTN \cong \angle MTQ \text{ (zajednički ugao)} \\ \angle TQN \cong \angle TMP = \frac{\omega}{2} \\ \angle TNQ \cong \angle TPM \text{ (treći ugao)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(slič. UUU)}} \triangle TNQ \sim \triangle TPM$$

q.e.d.

(#) Neka je I centar upisanog kruga ΔABC ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla ΔABC, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku $\overset{\frown}{AC}$ (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je ΔPAI jkk, da važi poredak $P-M-S$ i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave $[P,S)$ i kruga k dokazati da je $\Delta AMP \sim \Delta NAP$ i da je $\Delta PIM \sim \Delta PMI$.

Rj.



Posmatrajmo ΔAMP i NAP. Ugao $\sphericalangle APM \cong \sphericalangle APN = \omega$ im je zajednički, imaju po jedan ugao od $90°$ tj.

$\sphericalangle AMP = \sphericalangle NAP = 90°$

($\sphericalangle NAP$ je ugao nad prečnikom). Prema tome i treći ugao im je podudaran

$\sphericalangle PAM \cong \sphericalangle ANP = \lambda$.

Prema sličnosti UUU

$\Rightarrow \Delta AMP \sim \Delta NAP$

$\Downarrow$

$$\frac{AP}{NP} = \frac{MP}{AP}$$

q.e.d

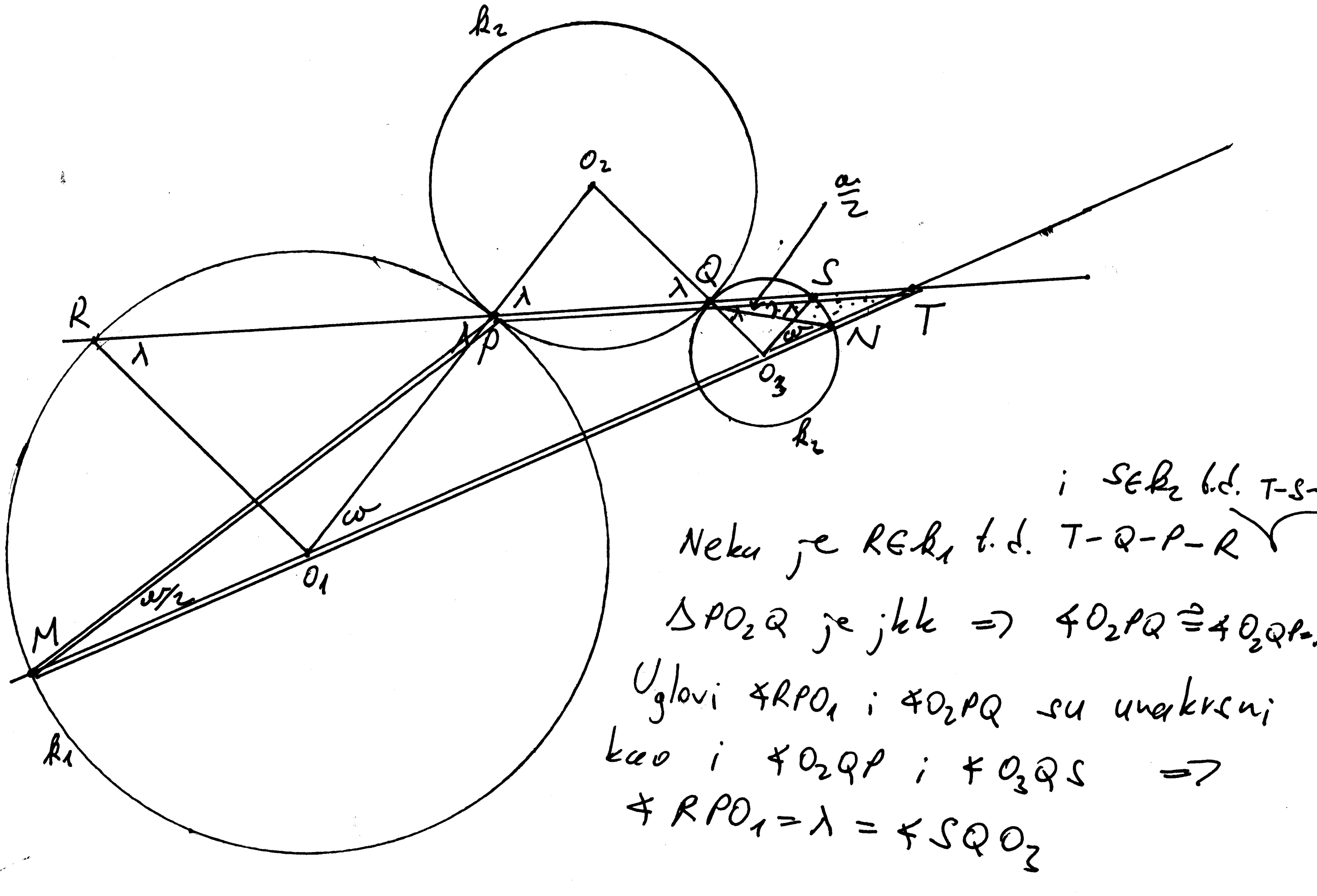
Kako je ΔAPI jkk to je $AP \cong PI$.
Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{PI}{NP} = \dfrac{MP}{IP} \\ \sphericalangle IPN \cong \sphericalangle MPI = \theta \\ \text{(zajednički ugao)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(slič. SUS)}} \Delta PIN \sim \Delta PMI$$

q.e.d.

(#) Neka su dati krugovi $k_1(O_1,r_1)$, $k_2(O_2,r_2)$ i $k_3(O_3,r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q i k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tačaka. Na pravoj $p(O_1,O_2)$ date su tačke M i N takve da $M\in k_1$, $N\in k_3$ i važi poredak $M-O_1-O_2-N$. Neka je $\{T\}=p(O_1,O_2)\cap p(P,Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

Rj.



Neka je $R\in k_1$ t.d. $T-Q-P-R$ i $S\in k_2$ t.d. $T-S-Q$

$\triangle PO_2Q$ je jkk $\Rightarrow \measuredangle O_2PQ \cong \measuredangle O_2QP=\lambda$,

Uglovi $\measuredangle RPO_1$ i $\measuredangle O_2PQ$ su unakrsni kao i $\measuredangle O_2QP$ i $\measuredangle O_3QS$ $\Rightarrow$

$\measuredangle RPO_1=\lambda=\measuredangle SQO_3$

Kako su $\triangle PO_1R$ i $\triangle SO_3Q$ jkk $\Rightarrow \measuredangle PRO_1=\lambda$ i $\measuredangle QSO_3=\lambda$

Ako posmatramo $p(S,R)$ i primjetimo da je $\measuredangle RSO_3\cong\measuredangle RPO_1=\lambda$

$\Rightarrow PO_1 \parallel SO_3$

$PO_1\parallel SO_3$ i $p(M,N)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle SO_3T\cong\measuredangle PO_1T=\omega$.

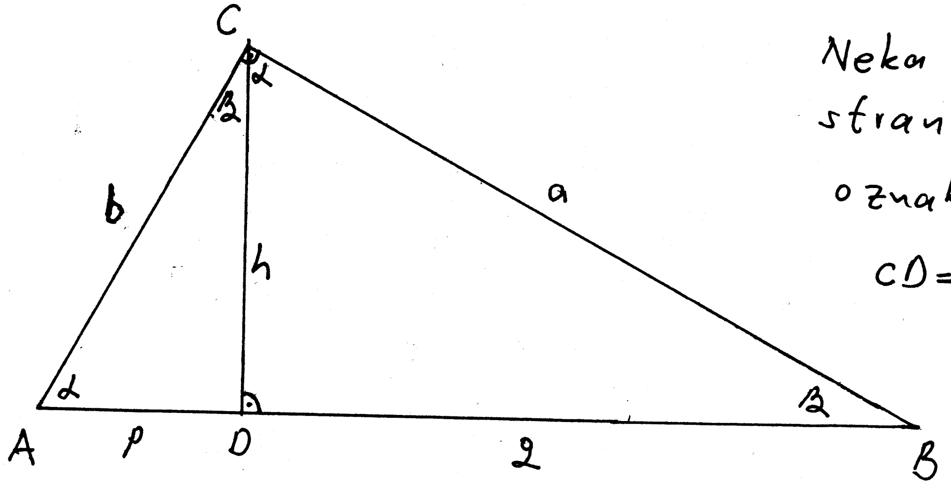
Ovo su dva centralna ugla nad lukom kojima odgovaraju periferijski $\measuredangle O_1MP$ i $\measuredangle NQS$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle QTN \cong \measuredangle MTQ \text{ (zajednički ugao)}\\ \measuredangle TQN \cong \measuredangle TMP = \frac{\alpha}{2}\\ \measuredangle TNQ \cong \measuredangle TPM \text{ (treći ugao)}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(slič UUU)}} \triangle TNQ \sim \triangle TPM$$

q.e.d.

U pravouglom trouglu ΔABC, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC=a$, $AC=b$, $AB=c$). Dokazati da je $a^2+b^2=c^2$.

Rj.



Neka je CD visina na stranicu c. Uvedimo oznake $AD=p$, $DB=q$, $CD=h$, $\sphericalangle CAB=\alpha$ i $\sphericalangle ABC=\beta$.

$c=p+q$.

U ΔADC, $\sphericalangle ADC=90^\circ$, $\sphericalangle CAD=\alpha \Rightarrow \sphericalangle ACD=\beta$

U ΔBCD, $\sphericalangle BDC=90^\circ$, $\sphericalangle DBC=\beta \Rightarrow \sphericalangle BCD=\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADC=90^\circ\\ \sphericalangle CAB=\sphericalangle CAD=\alpha\\ \sphericalangle ABC=\sphericalangle ACD=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta ACD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{p} \Rightarrow b^2=cp \quad \ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ACB=\sphericalangle CDB=90^\circ\\ \sphericalangle CAB=\sphericalangle BCD=\alpha\\ \sphericalangle ABC=\sphericalangle DBC=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta BCD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{a}=\frac{a}{q} \Rightarrow a^2=cq \quad \ldots(2)$$

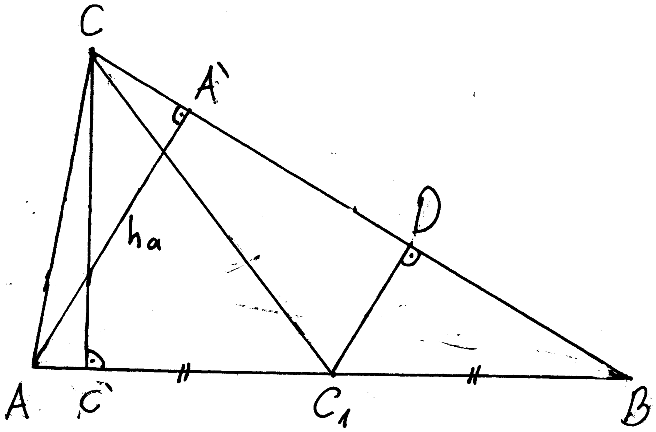
$$(1)\ ;\ (2) \Rightarrow a^2+b^2=cq+cp=c(p+q)=c\cdot c=c^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

q.e.d.

Dat je trougao ΔABC u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i poznata je težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da $C_1D = \frac{1}{2} h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

Rj.:



Prvo primjetimo da je C_1 sredina duži AB.
Kako je $AA' \perp BC$ i $C_1D \perp BC$ to je $p(A, A') \parallel p(C_1, D)$.
Primjenom Talesove teoreme sad možemo zaključiti da je $\frac{AB}{C_1B} = \frac{AA'}{C_1D}$.

Kako je $\frac{AB}{C_1B} = \frac{2}{1} \Rightarrow AB = 2C_1B$.

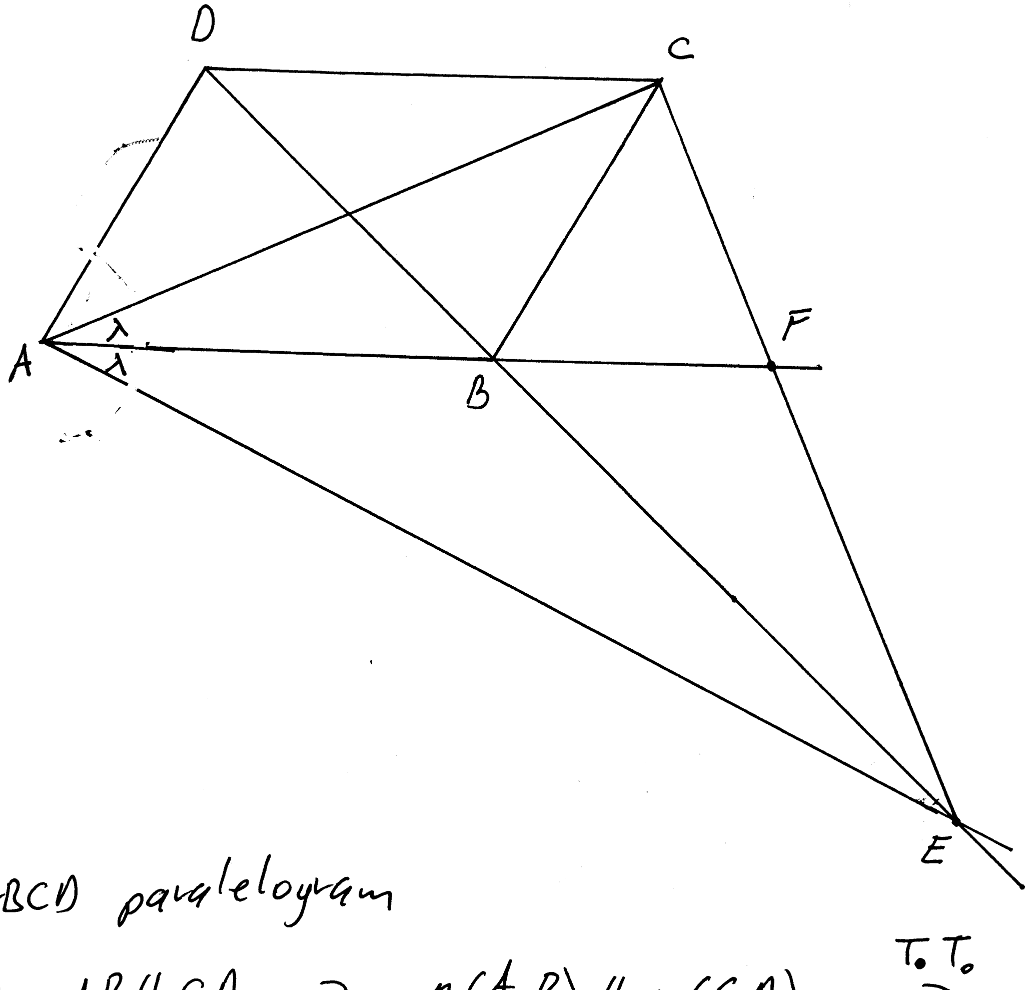
Možemo zaključiti $\frac{AA'}{C_1D} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2C_1D = AA'$

$$\Rightarrow \quad C_1D = \frac{1}{2} h_a$$

q.e.d.

(#) Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\measuredangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB. Dokazati da $\dfrac{EC}{EF} = \dfrac{AB}{BF}$.

Rj.



$\square ABCD$ paralelogram

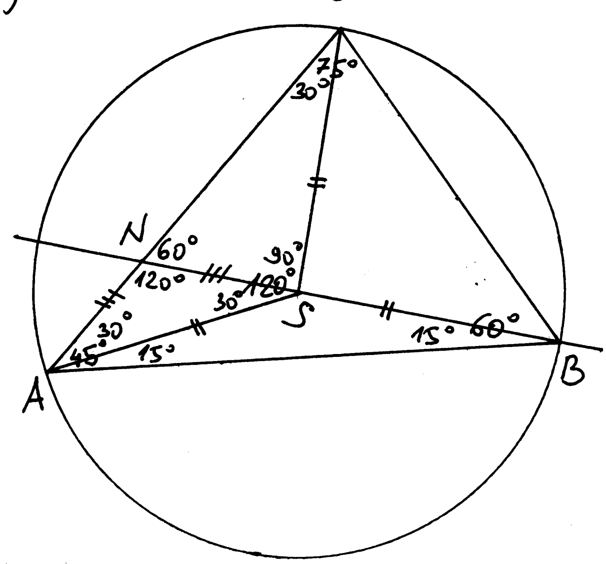
$$\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D) \overset{T.T.}{\Longrightarrow} \frac{EC}{EF} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{BF} \quad \dots (*)$$

Kako je $CD \cong AB \overset{(*)}{\Longrightarrow} \dfrac{EC}{EF} = \dfrac{AB}{BF}$

q.e.d.

(#) U trouglu ΔABC je $\alpha:\beta:\gamma = 3:4:5$. Dokazati da prava koja sadrži poluprečnik BS (S je centar opisane kružnice ΔABC) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1:2$ računajući od vrha A.

Rj:



$\alpha:\beta:\gamma = 3:4:5$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{4}{5}$

$\alpha = \frac{3}{4}\beta$ $\quad$ $\gamma = \frac{5}{4}\beta$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\frac{3}{4}\beta + \beta + \frac{5}{4}\beta = 180°$

$3\beta = 180°$

$\beta = 60°$

$\Rightarrow \alpha = 45°$; $\gamma = 75°$

$\sphericalangle ASC$ centralni ugao nad tetivom AC

$\sphericalangle ASC = 120° \Rightarrow \sphericalangle SAC = \sphericalangle SCA =$

ΔABS jkk sa osnovicom $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = 15° \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle CNB = 60°$ (vanjski ugao ΔABN)

$\Rightarrow \sphericalangle ANB = 120° \Rightarrow \sphericalangle ASN = 30° \Rightarrow AN \cong SN$

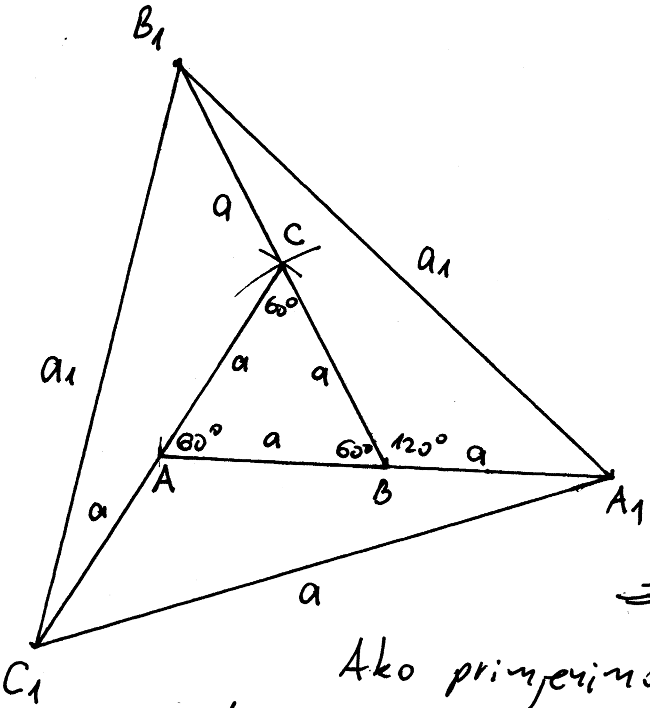
ΔNSC je pravougli pa $\cos 60° = \frac{SN}{CN} \Rightarrow CN \cdot \frac{1}{2} = SN = AN$

$CN = 2AN$

tj. $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$ q.e.d.

(#) Ako jednakostraničnom trouglu ΔABC (stranice a) svaku stranicu produžimo za a, dobijemo trougao $\Delta A_1B_1C_1$. U kojem omjeru se nalaze površine trouglova ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$?

Rj.



Uvedimo oznake kao sa slike. Dužinu stranice a_1 ćemo odrediti na dva načina.

I način

Primjetimo da kako je ΔABC jks to $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$

$\Rightarrow \sphericalangle B_1BA_1 = 120°$.

Ako primjenimo kosinusnu teoremu na stranicu a_1 u ΔB_1BA_1 imamo

$$a_1^2 = (2a)^2 + a^2 - 2(2a)\cdot a \cdot \cos 120° = 4a^2 + a^2 - 4a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = a\sqrt{7}$$

II način

Posmatrajmo ΔACB_1 i neka je CE visina tog trougla

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong CB_1 \\ CE \cong CE \\ \sphericalangle CEA \cong \sphericalangle CEB_1 = 90° \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{(ugao} \\ \text{naspram} \\ \text{veće str.)}}}{\overset{SSU}{\Longrightarrow}} \Delta AEC \cong \Delta B_1EC$$

$$\Downarrow$$

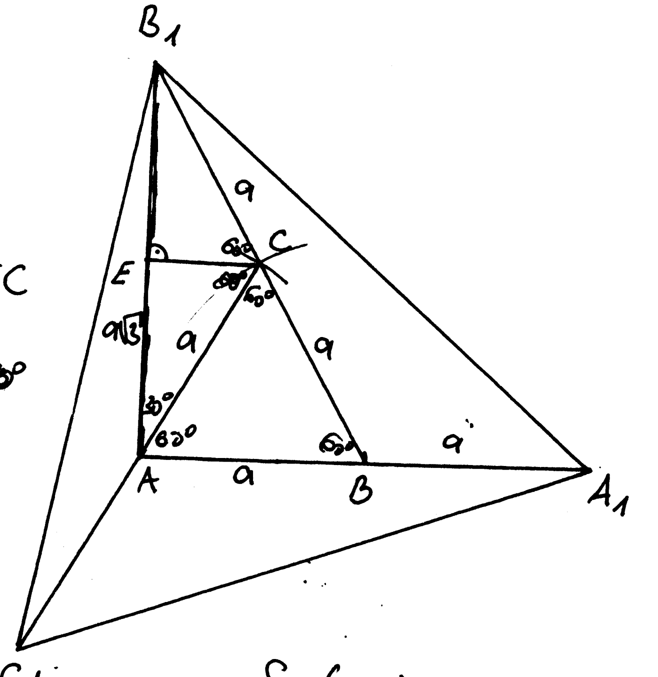
$$\sphericalangle ECA \cong \sphericalangle B_1CE = 60°$$
$$(\sphericalangle ACB = 120°)$$

$\Rightarrow \sphericalangle CAE = 30° \Rightarrow \sphericalangle A_1AB_1 = 90°$

ΔABB_1 pravougli $\overset{\text{Pit. teor.}}{\Longrightarrow} AB_1^2 = 3a^2$

ΔA_1AB_1 pravougli $\overset{\text{Pit. teor.}}{\Longrightarrow} A_1B_1^2 = 7a^2$

$\Rightarrow \quad a_1 = a\sqrt{7}$



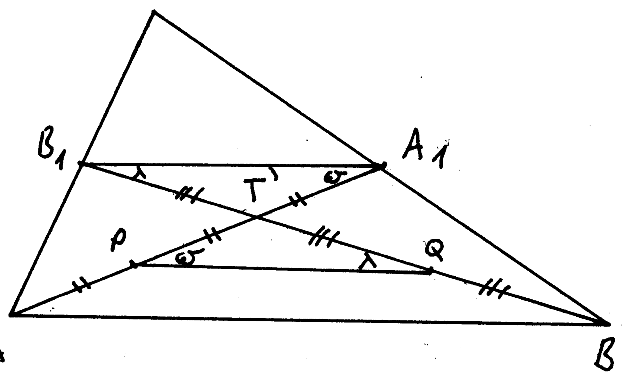
Sad imamo:

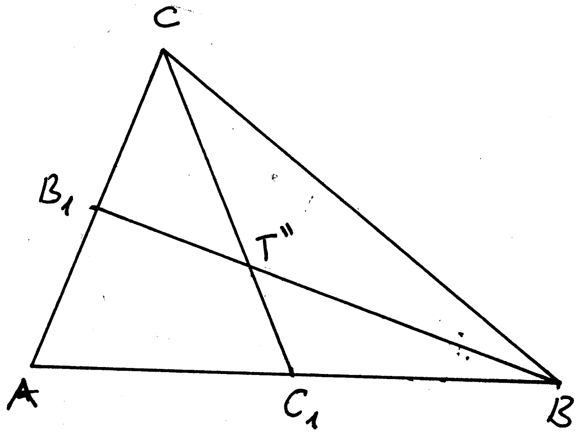
$$P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{a_1 \cdot h}{2} = \frac{a_1\sqrt{a_1^2 - \frac{a_1^2}{4}}}{2} = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = 7\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 7\,P_{\Delta ABC}$$

$$P_{\Delta ABC} : P_{\Delta A_1B_1C_1} = 1 : 7$$

(#) Dokazati da težište trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

Rj.





Neka su AA_1 i BB_1 težišnice u trouglu ΔABC i $\{T'\} = AA_1 \cap BB_1$.

A_1B_1 je srednja linija ΔABC pa $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$.

Neka su P i Q redom središta duži AT' i BT'.

PQ je srednja linija $\Delta ABT'$ pa $PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow PQ \cong B_1A_1$. Dalje, posmatrajmo $\Delta PQT'$ i $\Delta B_1T'A_1$.

Ovi trouglovi su slični (imaju sva tri podudarna ugla

$$\Rightarrow \frac{PT'}{T'A_1} = \frac{QT'}{T'B_1} = \frac{PQ}{A_1B_1} = 1 \Rightarrow PT' \cong A_1T' \text{ i } QT' \cong T'B_1$$

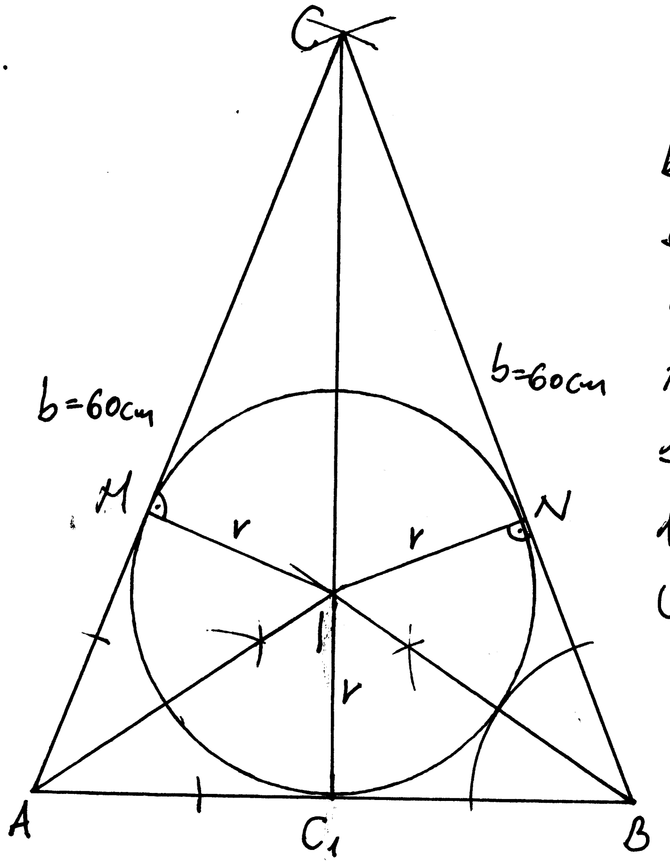
Pa imamo $\quad \dfrac{AT'}{T'A_1} = \dfrac{BT'}{T'B_1} = \dfrac{2}{1}$.

Na isti način ako pretpostavimo da se težišnice BB_1 i CC_1 sijeku u tački T'' bi dobili $\dfrac{CT''}{T''C_1} = \dfrac{BT''}{T''B_1} = \dfrac{2}{1}$.

Iz jedinstvenosti podjele duži BB_1 u datom omjeru slijedi da je $T' \equiv T''$ pa težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

(#) Centar upisane kružnice u jednakokrakom trouglu dijeli visinu u odnosu 12 : 5. Ako je dužina kraka trougla 60 cm, naći dužinu osnovice tog trougla.

Rj.



Označimo sa I centar upisanog kruga. Visina CC_1 spuštena na stranicu AB je ujedno i simetrala ugla $\measuredangle ACB$ pa je $I \in CC_1$. Posmatrajmo trouglove ΔAIC i ΔBIC. U ΔAIC visina na stranicu AC je $MI = r$.

U ΔBIC visina na stranicu BC je $NI = r$.

U ΔABI visina na stranicu AB je $C_1I = r$.

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta AIC} + P_{\Delta BIC} + P_{\Delta ABI}$$

(ako označimo sa $h = CC_1$, sa $a = AB$, i sa $b = BC = AC$)

$$\frac{h \cdot a}{2} = \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot a}{2}$$

($b = 60$ cm)

$$\frac{h \cdot a}{2} = r \cdot 60 + \frac{r \cdot a}{2}$$

(Znamo $\frac{CI}{IC_1} = \frac{12}{5}$ (iz postavke)

$$\frac{CI}{IC_1} + 1 = \frac{12}{5} + 1$$

$$\frac{\overbrace{CI + IC_1}^{=h}}{\underbrace{IC_1}_{=r}} = \frac{17}{5} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{17}{5}$$

$$h = \frac{17}{5} r$$

... (1))

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \frac{17}{5} r \cdot \frac{a}{2} = 60r + \frac{a}{2} r \quad /:r$$

$$60 + \frac{a}{2} = \frac{17a}{10} \quad /\cdot 10$$

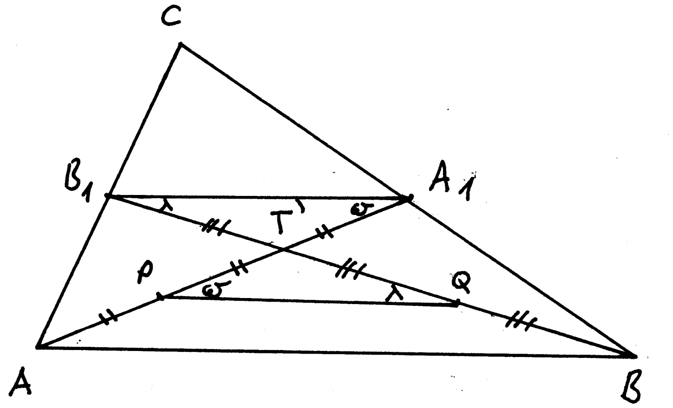
$$17a - 5a = 600$$

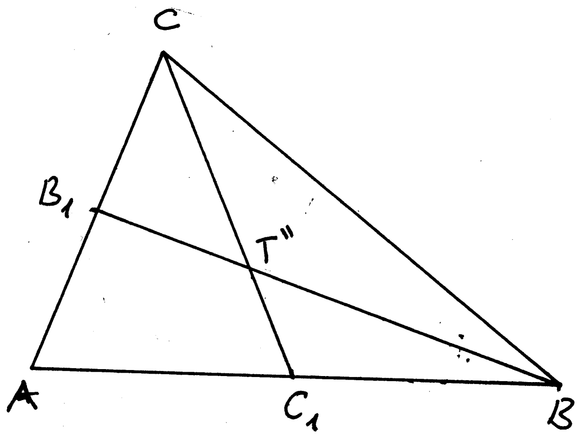
$$12a = 600$$

$$a = 50 \text{ cm}$$ ← traženo rješenje

Dokazati da težište trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

Rj.





Neka su AA_1 i BB_1 težišnice u trouglu ΔABC i $\{T'\} = AA_1 \cap BB_1$.

A_1B_1 je srednja linija ΔABC pa $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$.

Neka su P i Q redom središta duži AT' i BT'.

PQ je srednja linija $\Delta ABT'$ pa $PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2}AB$

$\Rightarrow PQ \cong B_1A_1$. Dalje, posmatrajmo $\Delta PQT'$ i $\Delta B_1T'A_1$.

Ovi trouglovi su slični (imaju sva tri podudarna ugla

$$\Rightarrow \frac{PT'}{T'A_1} = \frac{QT'}{T'B_1} = \frac{PQ}{A_1B_1} = 1 \Rightarrow PT' \cong A_1T' \text{ i } QT' \cong T'B_1$$

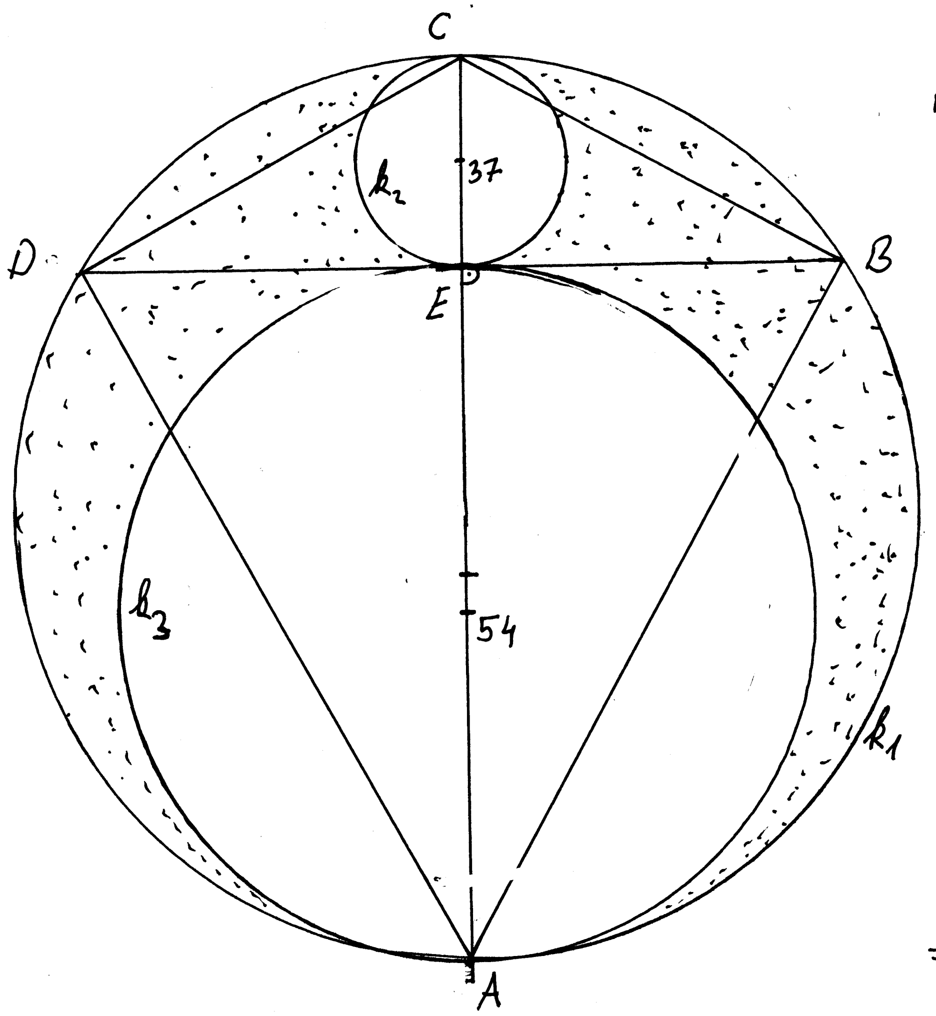
Pa imamo $\frac{AT'}{T'A_1} = \frac{BT'}{T'B_1} = \frac{2}{1}$.

Na isti način ako pretpostavimo da se težišnice BB_1 i CC_1 sijeku u tački T'' bi dobili $\frac{CT''}{T''C_1} = \frac{BT''}{T''B_1} = \frac{2}{1}$.

Iz jedinstvenosti podjele duži BB_1 u datom omjeru slijedi da je $T' \equiv T''$ pa težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$.

(#) Deltoid je upisan u krug k_1. Kraća dijagonala dijeli dužu na odsječke 37 cm i 54 cm. Nad tim odsječcima kao nad prečnicima konstruisani su krugovi k_2 i k_3. Naći površinu $P = P_{k_1} - P_{k_2} - P_{k_3}$, označiti na slici šta predstavlja ova površina i odrediti dužinu kraće dijagonale BD.

Rj.



P je označena na slici istačkano.

$$P_{k_1} = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{54+37}{2}\right)^2 \pi$$

$$P_{k_2} = \left(\frac{EC}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{37}{2}\right)^2 \pi$$

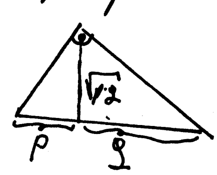
$$P_{k_3} = \left(\frac{AE}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{54}{2}\right)^2 \pi$$

$$P = P_{k_1} - P_{k_2} - P_{k_3} =$$

$$= \frac{54^2 + 2 \cdot 54 \cdot 37 + 37^2 - 37^2 - 54^2}{4} \pi$$

$$= 27 \cdot 37 \pi = 999 \pi$$

Primjetimo da je $\measuredangle ABC$ u stvari ugao nad prečnikom AC pa je $\measuredangle ABC = 90°$. Od ranije znamo da



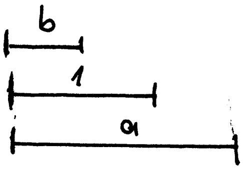
pa $BE = \sqrt{37 \cdot 54} = \sqrt{37 \cdot 6 \cdot 9} = 3\sqrt{222}$

$BD = 6\sqrt{222}$.

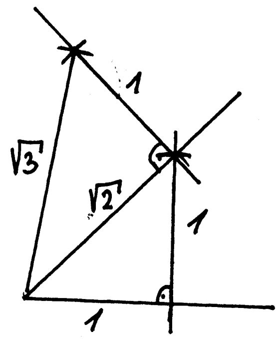
(#) Date su duži a i b $(b<1<a)$. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{b} = \frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2 .$$

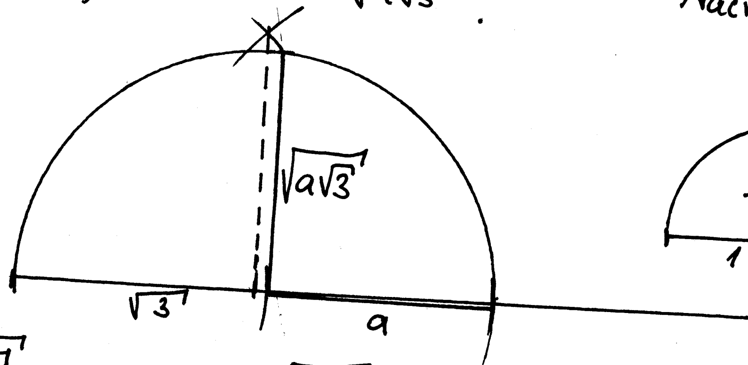
Rj.



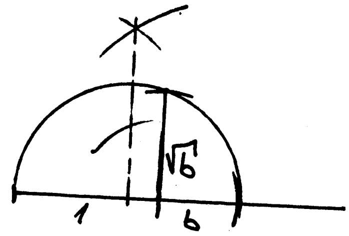
Nacrtajmo duži $\sqrt{3}$ i $\sqrt{2}$.



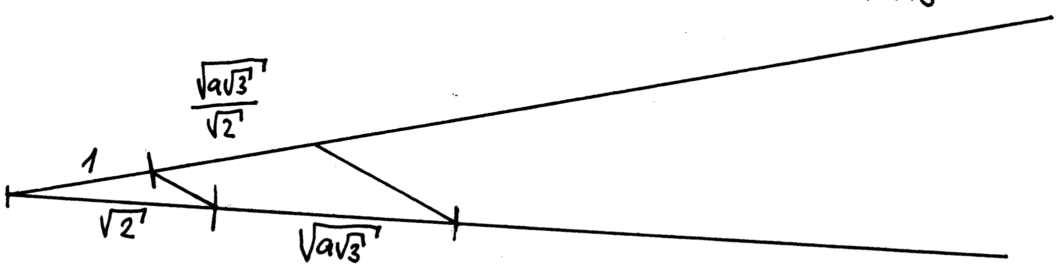
Nacrtajmo duž $\sqrt{a\sqrt{3}}$.



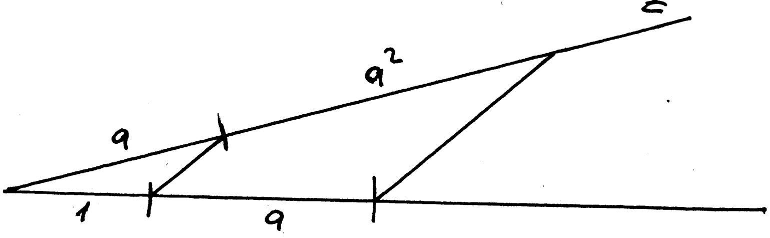
Nacrtajmo duž $\sqrt{b}$.



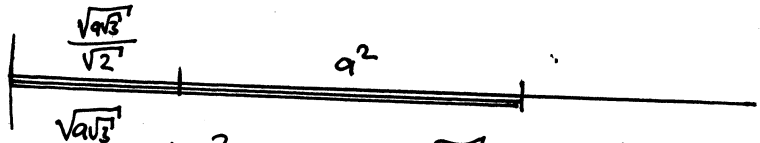
Nacrtajmo duž $\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$. $y = \frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a\sqrt{3}}} = \frac{1}{y}$



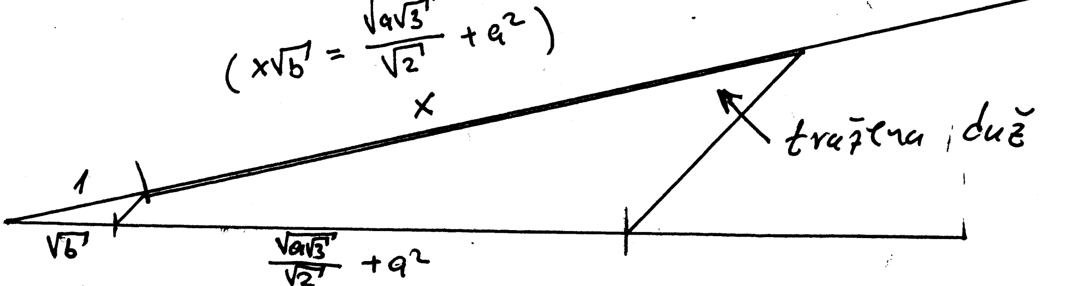
Nacrtajmo duž a^2. $z = a\cdot a \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{a}{z}$



Nacrtajmo duž $\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2$



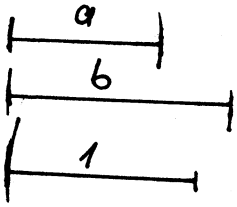
Na kraju, nacrtajmo duž $x = \dfrac{\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2}{\sqrt{b}}$. $\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2} = \dfrac{1}{x} \right)$

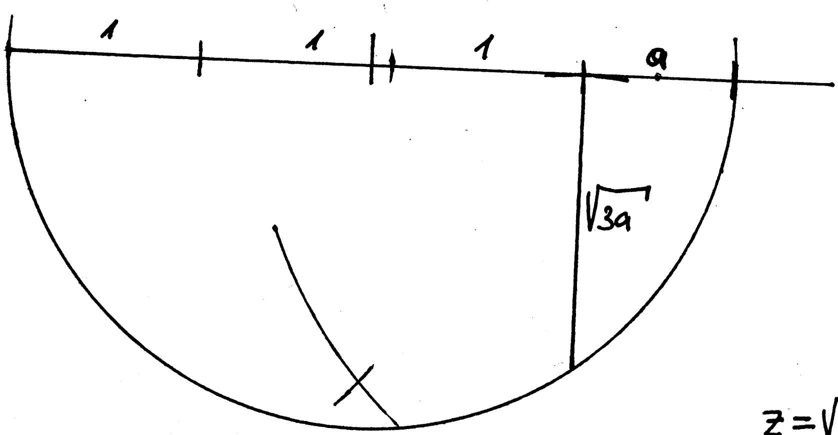


Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{2}+1=\frac{\sqrt{3a}-a^2}{\sqrt{b}}, \quad a<1<b.$$

Rj.



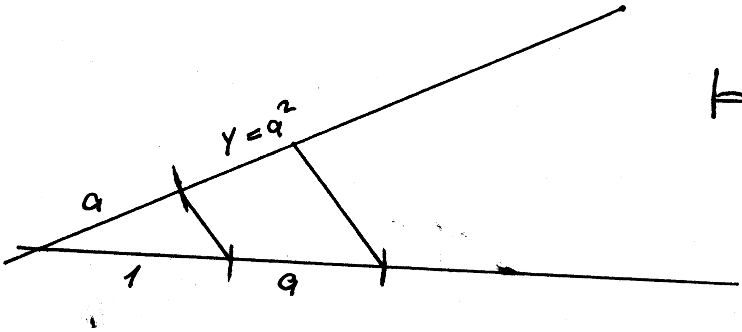


$Y=a^2$

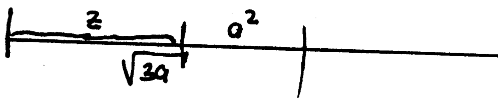
$Y=a\cdot a$

$\frac{Y}{a}=\frac{a}{1}$

$\frac{1}{a}=\frac{a}{Y}$

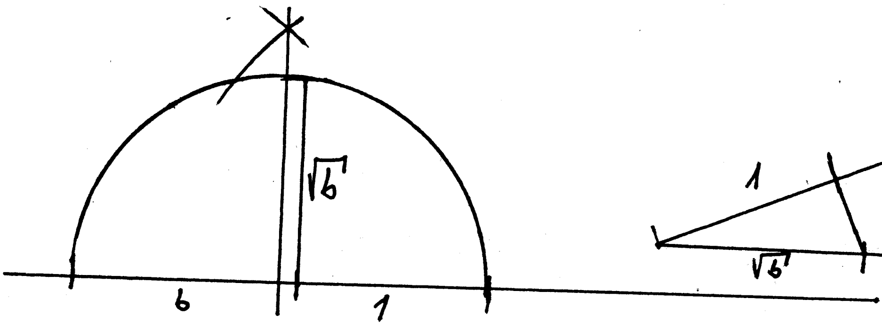


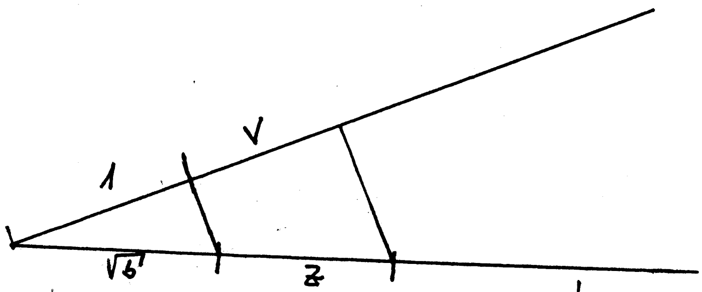
$z=\sqrt{3a}-a^2$



$V=\frac{z}{\sqrt{b}}$

$\frac{\sqrt{b}}{z}=\frac{1}{V}$



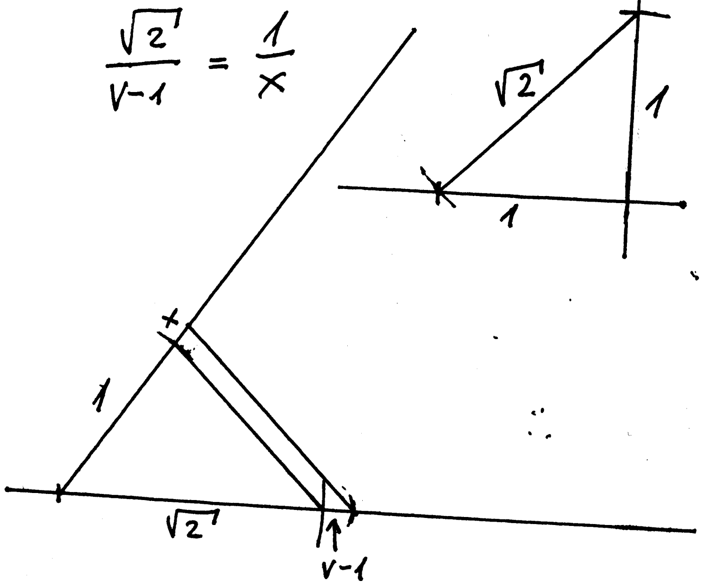


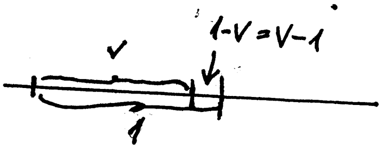
Sad imamo $x\sqrt{2}+1=V$

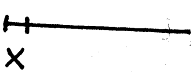
$x\sqrt{2}=V-1$

$x=\frac{V-1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{V-1}=\frac{1}{x}$



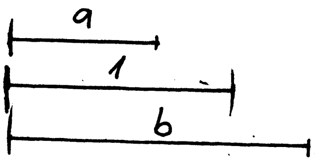




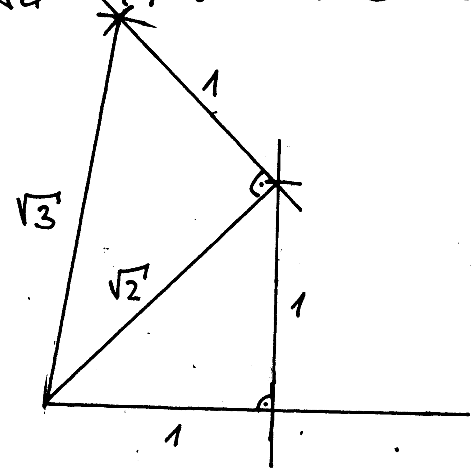
(#) Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{3} + ab}{\sqrt{ab}} - 1$ gdje su a i b date duži

$(a < 1 < b)$.

Rj.



Nacrtajmo duž $\sqrt{3}$.

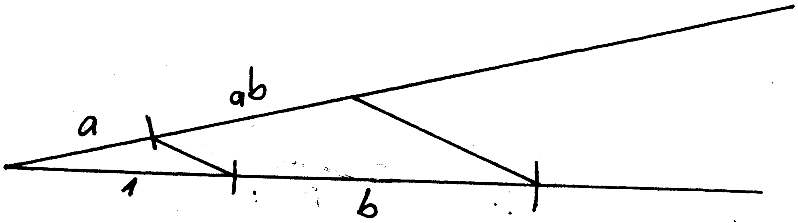


Nacrtajmo duž ab.

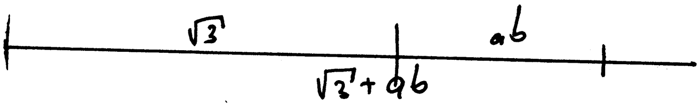
$y = a \cdot b$

$\dfrac{y}{a} = \dfrac{b}{1}$

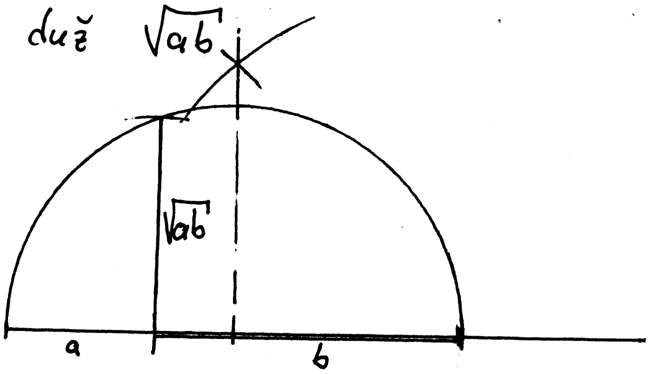
$\dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{y}$



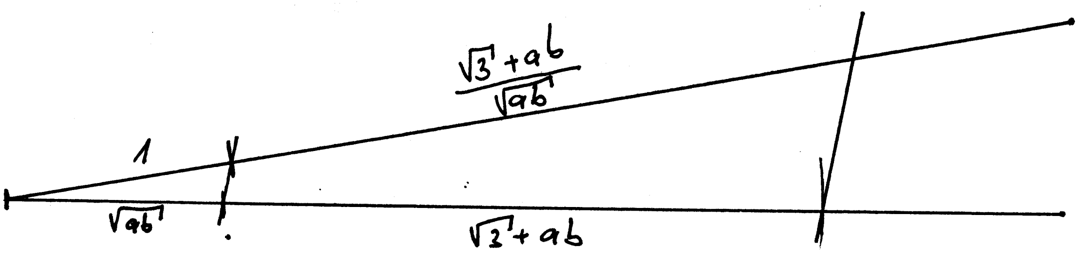
Nacrtajmo duž $\sqrt{3} + ab$



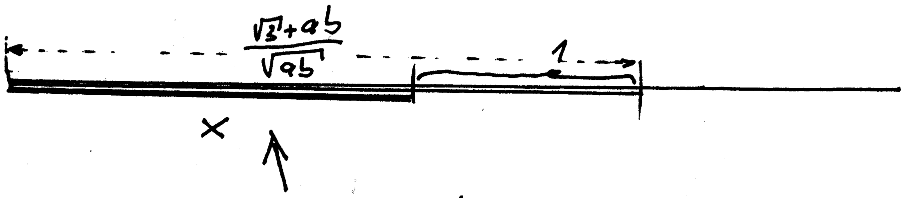
Nacrtajmo duž $\sqrt{ab}$



Nacrtajmo duž $\dfrac{\sqrt{3} + ab}{\sqrt{ab}}$. $z = \dfrac{\sqrt{3} + ab}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3} + ab} = \dfrac{1}{z}$



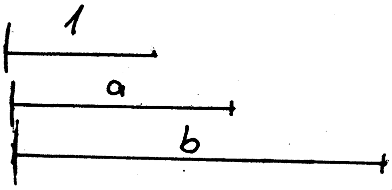
Na kraju nacrtajmo duž $x = \dfrac{\sqrt{3} + ab}{\sqrt{ab}} - 1$



tražena duž

(#) Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

Rj. Neka su date duži a, b i neka je data jedinična duž.



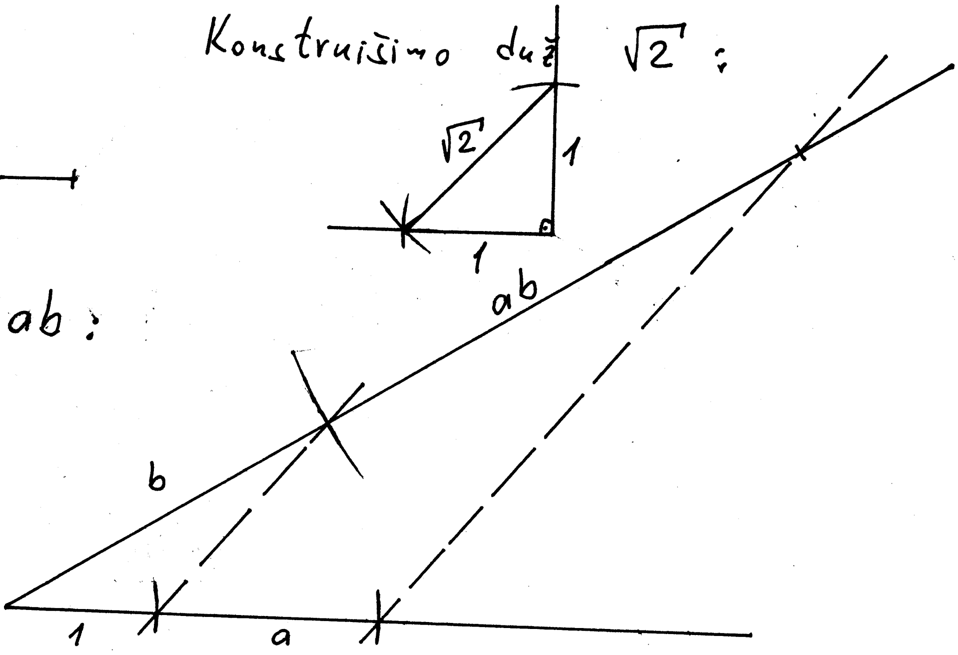
Konstruišimo duž $\sqrt{2}$:

Konstruišimo duž ab:

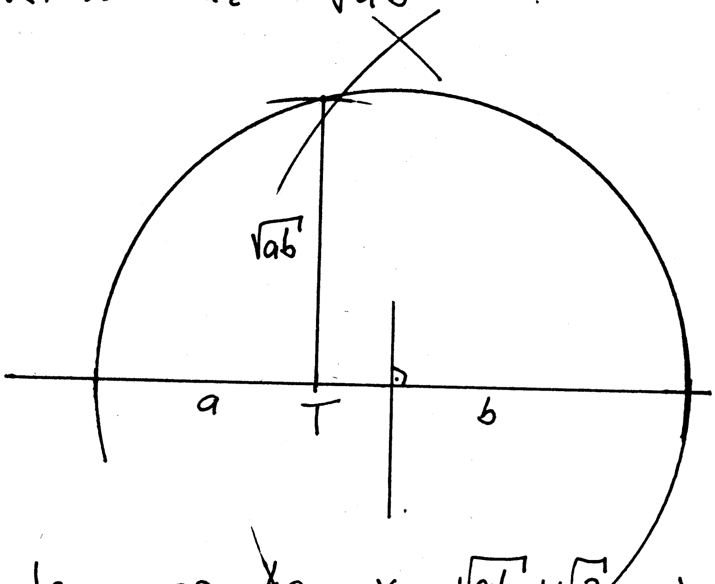
$x_1 = ab \quad /:b$

$\dfrac{x_1}{b} = \dfrac{a}{1}$

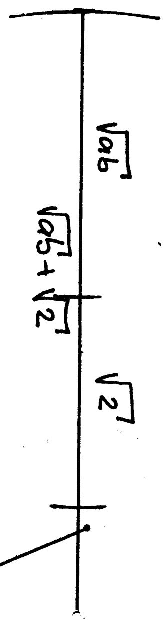
$\dfrac{1}{a} = \dfrac{b}{x_1}$



Konstruišimo duž $\sqrt{ab}$



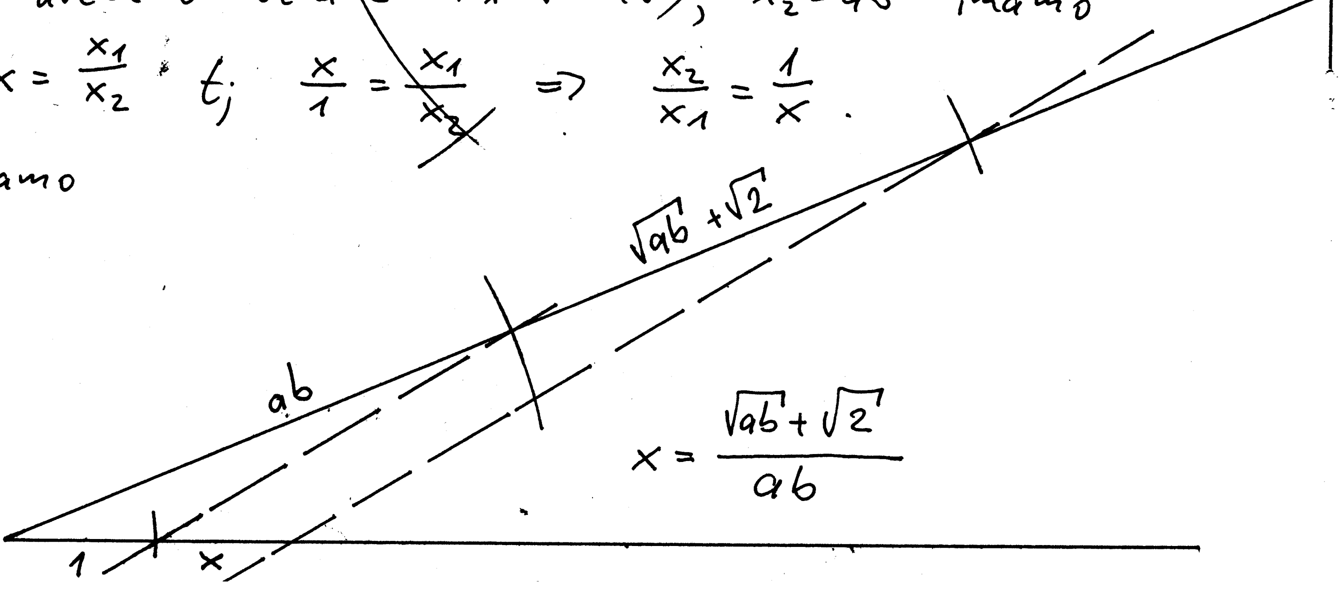
Konstruišimo duž $\sqrt{ab} + \sqrt{2}$:



Ako uvedemo oznake $x_1 = \sqrt{ab} + \sqrt{2}$, $x_2 = ab$ imamo

$x = \dfrac{x_1}{x_2}$ tj $\dfrac{x}{1} = \dfrac{x_1}{x_2} \Rightarrow \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{x}$.

Imamo

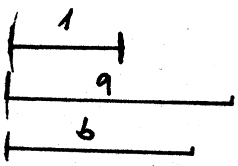


$x = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$

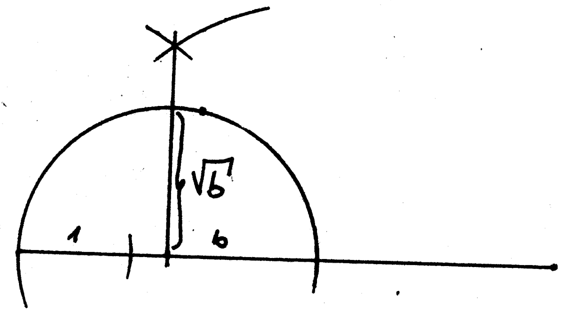
(#) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}.$$

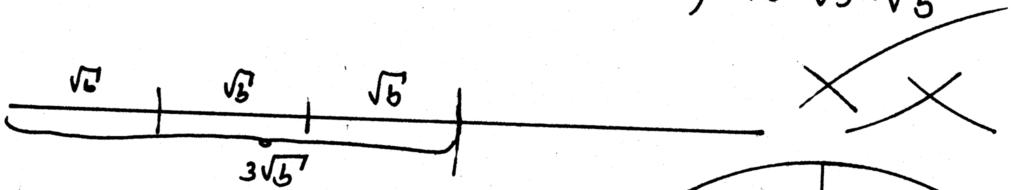
Rj.



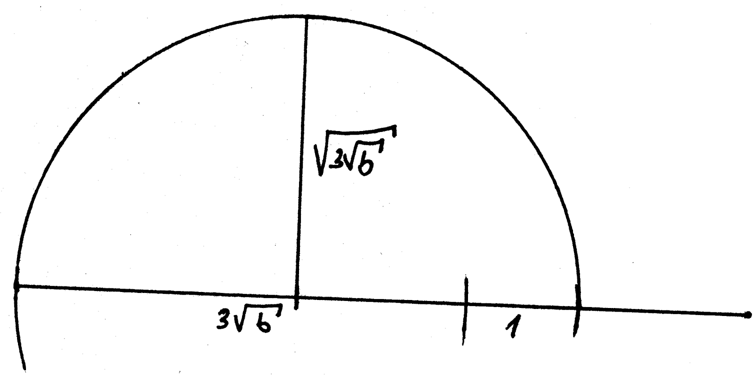
Nacrtajmo duž $\sqrt{b}$.



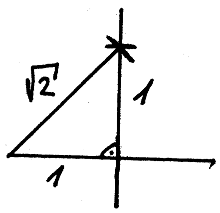
Nacrtajmo duž $3\sqrt{b}$ tj. $\sqrt{b}+\sqrt{b}+\sqrt{b}$



Nacrtajmo duž $\sqrt{3\sqrt{b}}$



Nacrtajmo $\sqrt{2}$



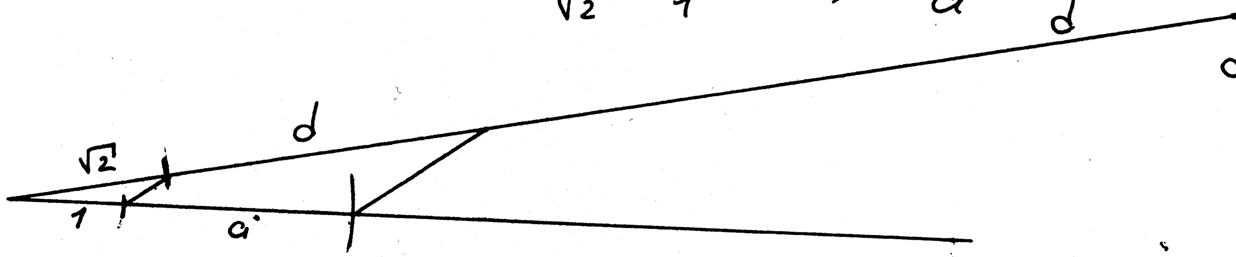
$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a} \quad /\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{\sqrt{2}\,a} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{1}{x}$$

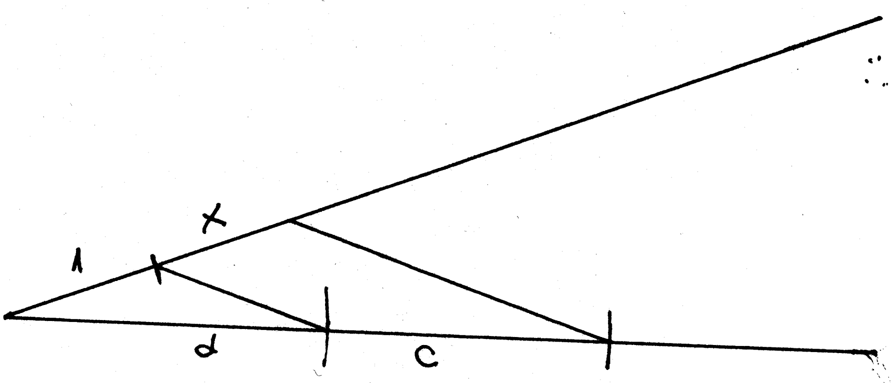
gdje je $c = \sqrt{3\sqrt{b}}$

Nacrtajmo duž $d = a\sqrt{2}$

$$\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{a}{1} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}}{d}$$

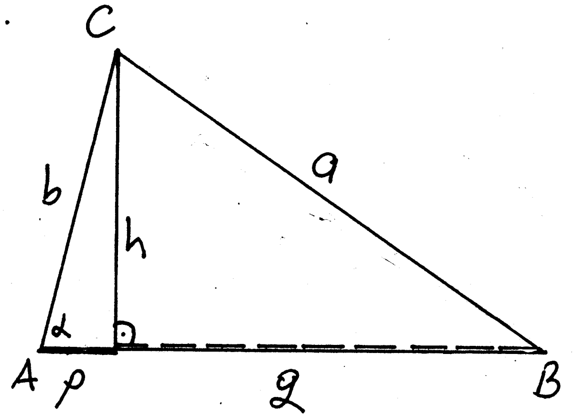


$d = a\sqrt{2}$



(#) (Kosinusna teorema) Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \sphericalangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Rj:



Uvedimo oznake kao na slici.

$$\cos\alpha = \frac{p}{b}$$

$$\begin{aligned} & a^2 = h^2 + q^2 \\ + \; & h^2 = b^2 - p^2 \\ \hline & a^2 = b^2 + q^2 - p^2 \quad \ldots (*) \end{aligned}$$

$$q^2 - p^2 = (c-p)^2 - p^2$$

$$\left.\begin{aligned} q^2 - p^2 &= c^2 - 2pc \\ p &= b\cos\alpha \end{aligned}\right\} (**)$$

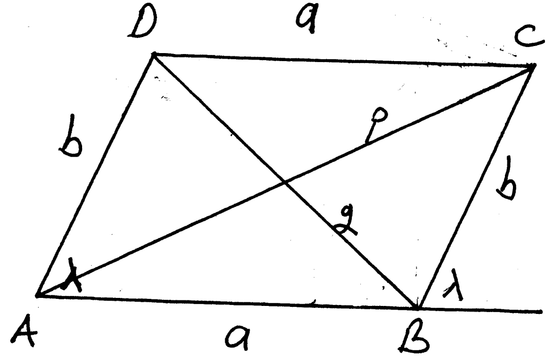
$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

q.e.d.

(#) Neka je $\square ABCD$ paralelogram kod koga su $AB=a$, $BC=b$, $AC=p$ i $BD=q$. Dokazati da vrijedi jednakost $p^2+q^2=2a^2+2b^2$.

(uputa: iskoristiti kosinusnu teoremu)

Rj.



$$p^2=a^2+b^2-2ab\cos\measuredangle ABC \quad (*)$$

$$q^2=a^2+b^2-2ab\cos\measuredangle BAD \quad (**)$$

$$\measuredangle BAD=180^\circ-\measuredangle ABC$$

$$\cos\measuredangle BAD=\cos(180^\circ-\measuredangle ABC)=-\cos\measuredangle ABC \quad (***)$$

$$(*)+(**)\overset{(***)}{\Longrightarrow} p^2+q^2=a^2+b^2-2ab\cos\measuredangle ABC+a^2+b^2+2ab\cos\measuredangle ABC$$

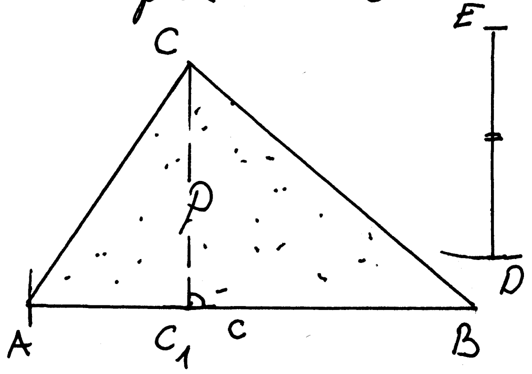
$$p^2+q^2=2a^2+2b^2$$

q.e.d

(#) Dat je $\triangle ABC$ i data je duž DE. Konstruisati pravougaonik čija je površina jednaka površini trougla $\triangle ABC$ i čija je jedna strana jednaka dužini duži DE.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



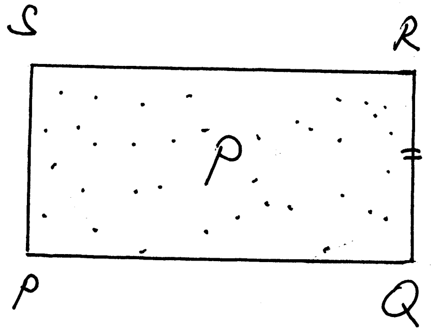
Neka je dat $\triangle ABC$, duž DE i neka je $\square PQRS$ četverougao čija je površina jednaka površini $\triangle ABC$ i $RQ \cong DE$

$$P_{\square PQRS} = |PQ|\cdot|RQ| = |PQ|\cdot|ED|$$

$$P_{\triangle ABC} = c\cdot h_c = |AB|\cdot|CC_1|$$

$$|PQ|\cdot|ED| = |AB|\cdot|CC_1|$$

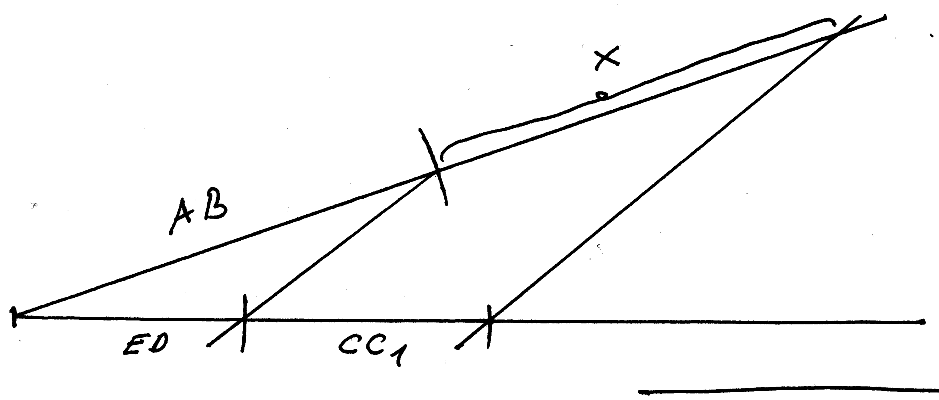
$$|PQ| = \frac{|AB|\cdot|CC_1|}{|ED|}$$



Kako su nam poznate duži AB, CC_1, ED to nije teško konstruisati duž PQ, a time i $\square PQRS$ (pošto su nam poznate duži PQ i QR).

Uputa za konstrukciju duži PQ.

$$\frac{\overset{=x}{PQ}}{AB} = \frac{CC_1}{ED} \Rightarrow \frac{ED}{CC_1} = \frac{AB}{x}$$

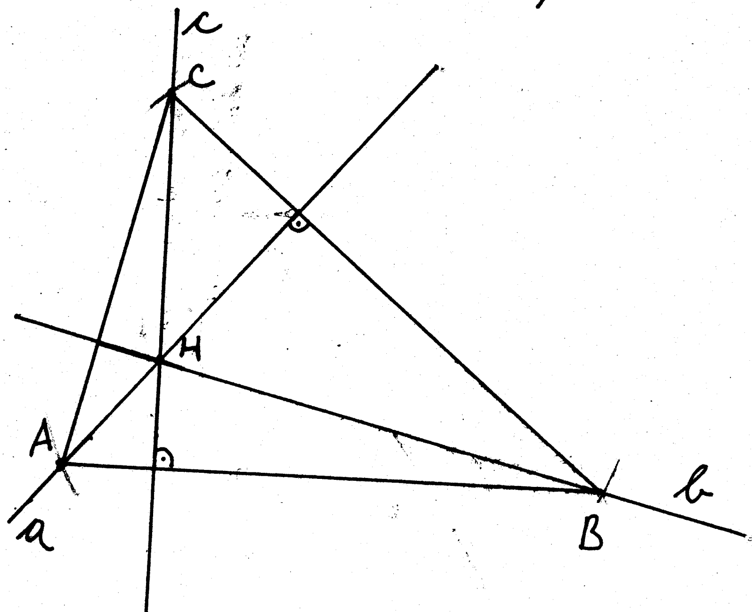


(#) Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao ΔABC, tako da njegove visine leže na datim pravama.

Rj

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak rješen.



Neka su date tri prave a, b i c koje se sijeku u tački H, neka je $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$, i neka a, b i c sadrže visine trougla ΔABC.

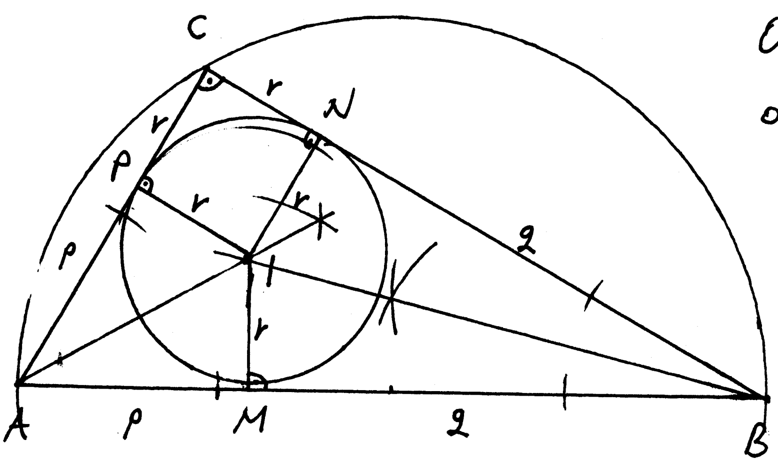
Primetimo da postoji tačno jedna prava koja prolazi kroz tačku A i okomita je na pravu c.

Isto tako, postoji tačno jedna prava koja prolazi kroz tačku B i okomita je na pravu a.

Kako su nam date prave a, b i c i tačka A to nije teško konstruisati tačku B i C.

(#) Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

Rj.



Neka je I centar upisanog kruga u trouglu ΔABC. Označimo sa M, N i P ortogonalne projekcije tačke I na duži AB, BC i AC redom. Znamo da je $IM = IN = IP = r$.

Dalje, primjetimo da je $BM \cong BN$ i $AM \cong AP$ (Zašto?). Isto tako $PC \cong CN \cong r$ (Zašto?)

Neka je $AM = p$ i $BM = q$.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(p+r)(q+r)}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{pq + pr + qr + r^2}{2} \quad \ldots (1)$$

ΔABC pravougli $\Rightarrow$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$(p+q)^2 = (p+r)^2 + (q+r)^2$$

$$\cancel{p^2} + 2pq + \cancel{q^2} = \cancel{p^2} + 2pr + r^2 + \cancel{q^2} + 2qr + r^2 \quad / : 2$$

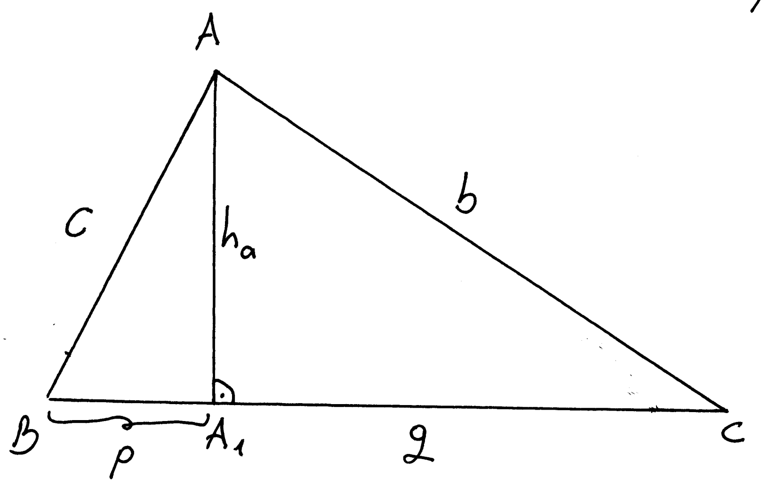
$$pq = pr + qr + r^2 \quad \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $P_{\Delta ABC} = \frac{pq + pq}{2} = pq$

q.e.d.

(#) Površina pravouglog trougla ΔABC se računa po formuli $P=\frac{a\cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P=\frac{a\cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

Rj.: raznostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta BA_1A}+P_{\Delta AA_1C}$$

$$P_{\Delta BA_1A}=\frac{p\cdot h_a}{2}$$

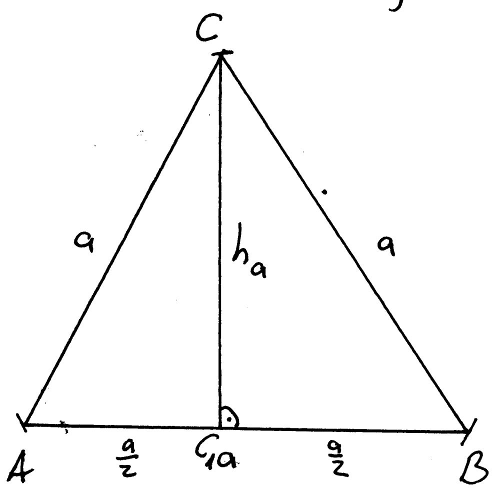
$$P_{\Delta A_1CA}=\frac{q\cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{p\cdot h_a}{2}+\frac{q\cdot h_a}{2}=\frac{p\cdot h_a+q\cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{(p+q)\,h_a}{2}=\frac{a\cdot h_a}{2}$$

q.e.d.

jednakostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta AC_1C}+P_{\Delta BCC_1}$$

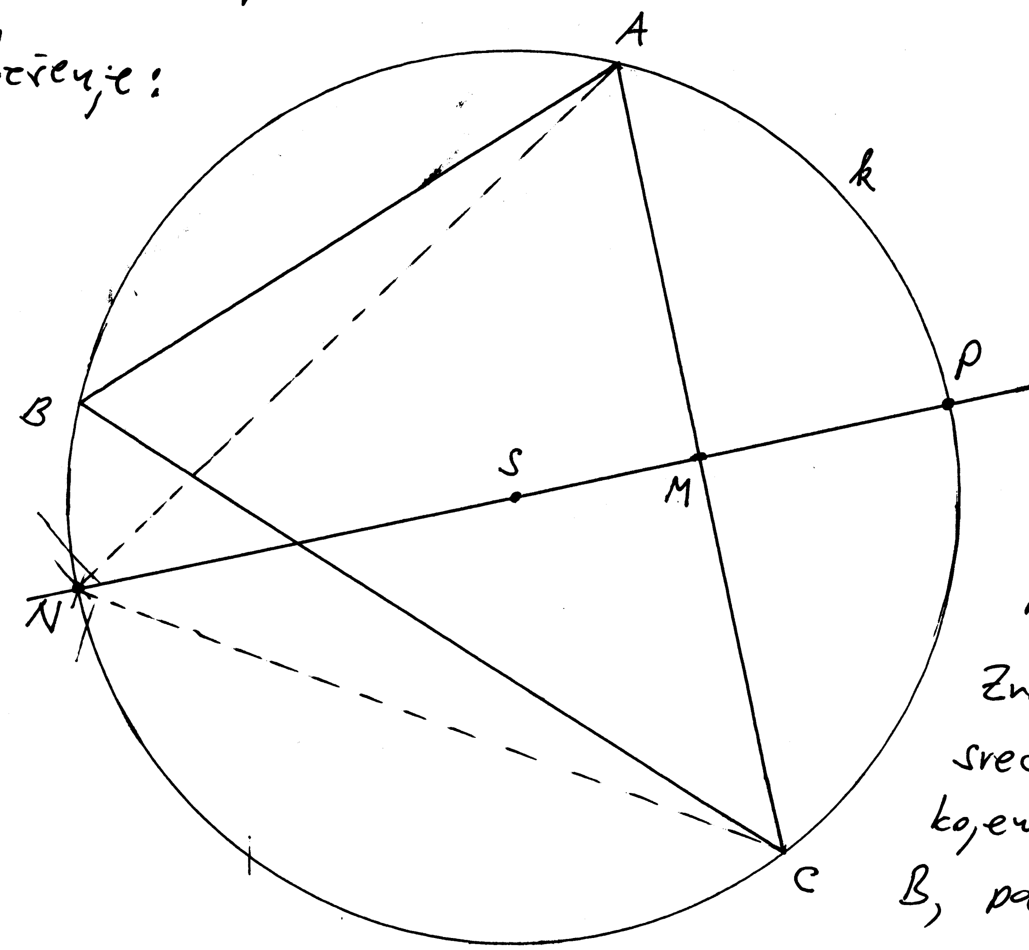
$$\left.\begin{array}{l} P_{\Delta AC_1C}=\dfrac{\frac{a}{2}\cdot h_a}{2}=\dfrac{a\cdot h_a}{4} \\[2ex] P_{\Delta BCC_1}=\dfrac{\frac{a}{2}\cdot h_a}{2}=\dfrac{a\cdot h_a}{4} \end{array}\right\}\ P_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot h_a}{2}$$

$$h_a^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$$

$$h_a=\frac{1}{2}a\sqrt{3} \qquad P_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

(#) Neka je k kružnica koja je opisana oko trougla ΔABC, ($AB < AC$) i neka je tačka N središte luka $\widehat{AC}$ (kojem pripada i tačka B) kružnice k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačku preseka prave $p(N,M)$ i opisane kružnice. Dokazati da je NP prečnik opisane kružnice.

Rješenje:



Na osnovu postavke zadatka tačka M pripada duži NP.

Da bi pokazali da je duž NP prečnik opisane kružnice trebamo pokazati da tačka S pripada duži NP.

Znamo da je N sredina luka $\widehat{AC}$ kojem pripada tačka B, pa je N podjednako udaljena od tački A i C tj. $AN \cong NC$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AN \cong NC \\ NM \cong NM \\ AM \cong MC \text{ (M sredina } AC) \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta ANM \cong \Delta CNM$$

$$\Downarrow$$

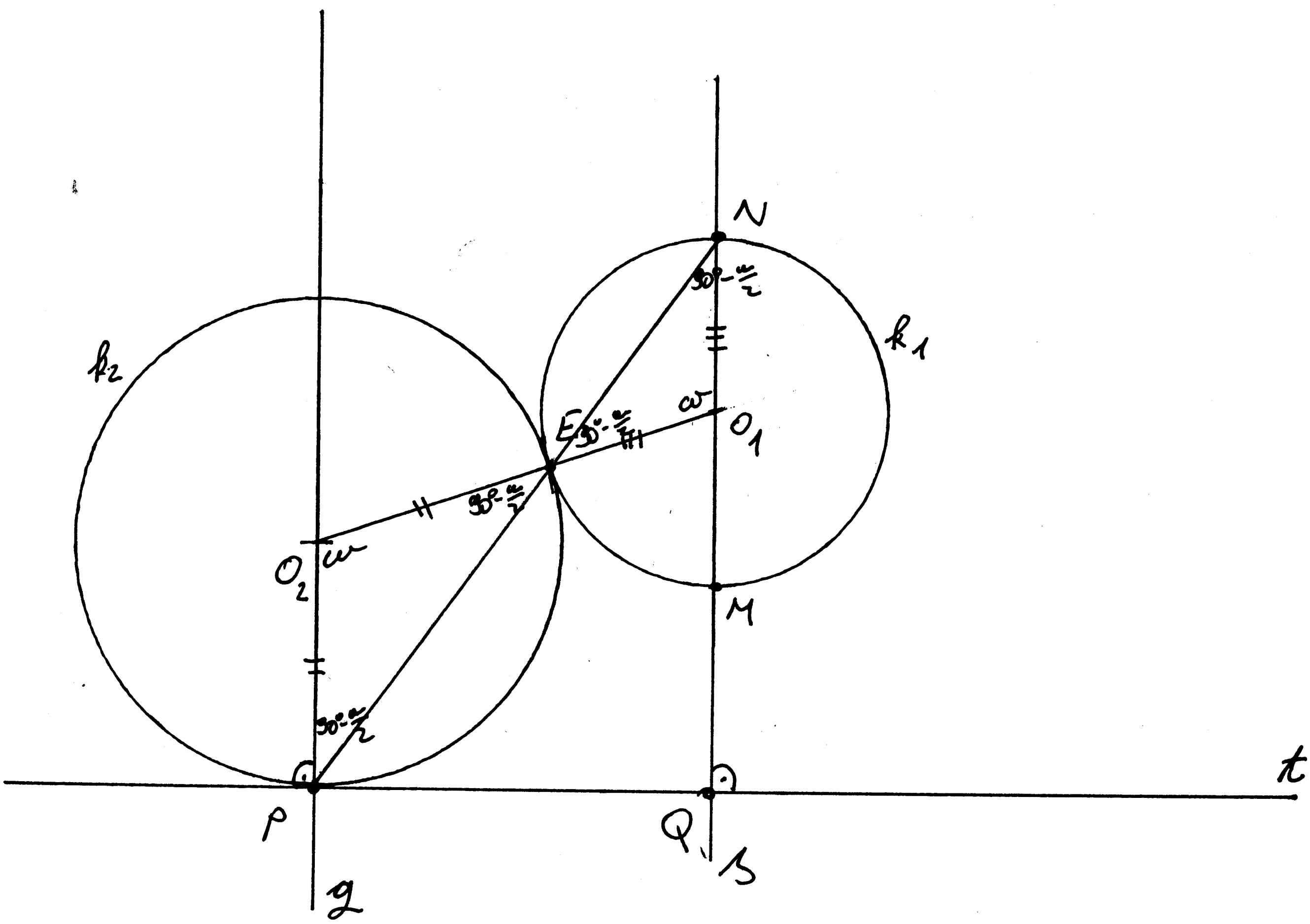
$$\sphericalangle AMN \cong \sphericalangle CMN = 90° \Rightarrow NP \text{ simetrala duži } AC$$

Kako je centar opisane kružnice presjek simetrala stranica to S leži na simetrali stranice AC tj. na NP.

$\Rightarrow$ NP je prečnik opisane kružnice.

(#) Date su prave t, g i s takve da $g \perp t$, $s \perp t$, $s \cap t = \{Q\}$ i $g \cap t = \{P\}$. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ takvi da $O_1 \in s$, $s \cap k_1 = \{M, N\}$ i $Q - M - N$, $O_2 \in g$, k_2 dodiruje krug k_1 u tački E i k_2 dodiruje pravu t u tački P. Dokazati da je $PN \cap O_1O_2 = \{E\}$.

Rj.



Prvo primjetimo kako je $g \perp t$ i $s \perp t$ to je $g \parallel s$. Dalje krugovi k_1 i k_2 se dodiruju u tački E pa imamo da $E \in p(O_1, O_2)$ i $O_1 - E - O_2$. Kako je $g \parallel s$ i $p(O_1, O_2)$ transferzala to $\measuredangle PO_2O_1 \stackrel{\sim}{=} \measuredangle NO_1O_2 = \omega$.
Posmatrajmo trouglove ΔPO_2E i ΔNO_1E.

ΔPO_2E jkk i $\measuredangle PO_2E = \omega \Rightarrow \measuredangle O_2PE \stackrel{\sim}{=} \measuredangle O_2EP = 90° - \frac{\omega}{2}$.

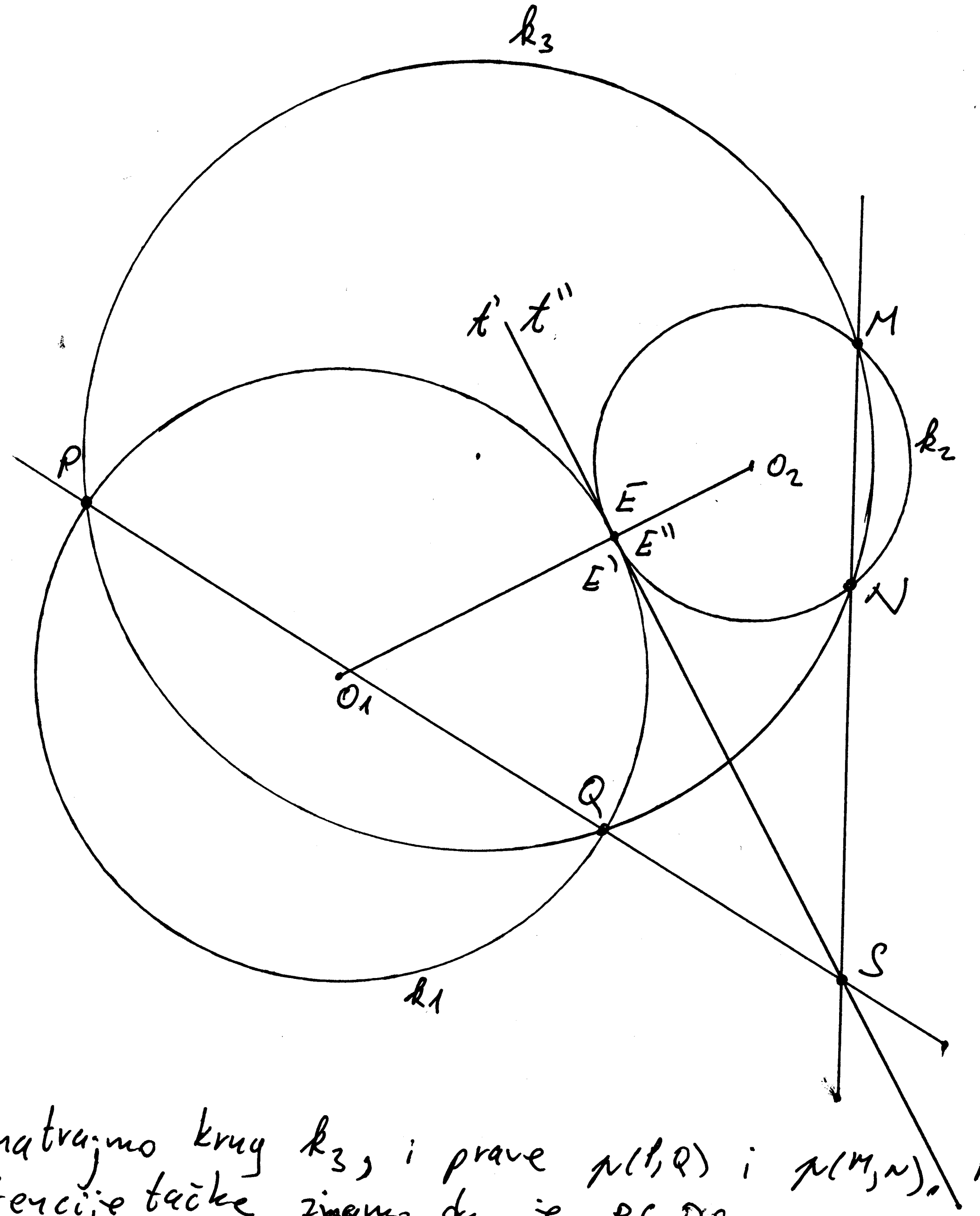
ΔEO_1N jkk i $\measuredangle NO_1E = \omega \Rightarrow \measuredangle NEO_1 = \measuredangle ENO_1 = 90° - \frac{\omega}{2}$

Na pravoj $p(O_1, O_2)$ imamo $E \in O_1O_2$ i $\measuredangle O_2EP \stackrel{\sim}{=} \measuredangle O_1EN = 90° - \frac{\omega}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow E \in p(P, N)$ tj. $O_1O_2 \cap PN = \{E\}$ q.e.d.

(#) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ koji se dodiruju u tački E i dat je krug $k_3(O_3, r_3)$ takav da siječe krug k_1 u tačkama P i Q, a krug k_2 u tačkama M i N. Ako sa S označimo presjek pravih $p(P,Q)$ i $p(M,N)$ dokazati da je $p(S,E)$ tangenta i na krug k_1 i na krug k_2.

Rj.



Posmatrajmo krug k_3, i prave $p(P,Q)$ i $p(M,N)$. Prema osobini potencije tačke znamo da je $PS \cdot QS = MS \cdot NS$. ...(1)
Iz tačke S možemo povući dvije tangente na krug k_1. Pa neka je t' tangenta na k_1 sa one strane prave $p(S,O_1)$ sa koje je tačka E i i neka t' dodiruje k_1 u tački E'. Slično imamo i za k_2, pa neka je t'' tangenta na krug k_2 sa one strane prave $p(S,O_2)$ sa koje je tačka E i neka t'' dodiruje k_2 u tački E''.

za k_1 $PS \cdot QS = SE'^2$
za k_2 $MS \cdot NS = SE''^2$
$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $SE'^2 \cong SE''^2 \Rightarrow SE' \cong SE''$

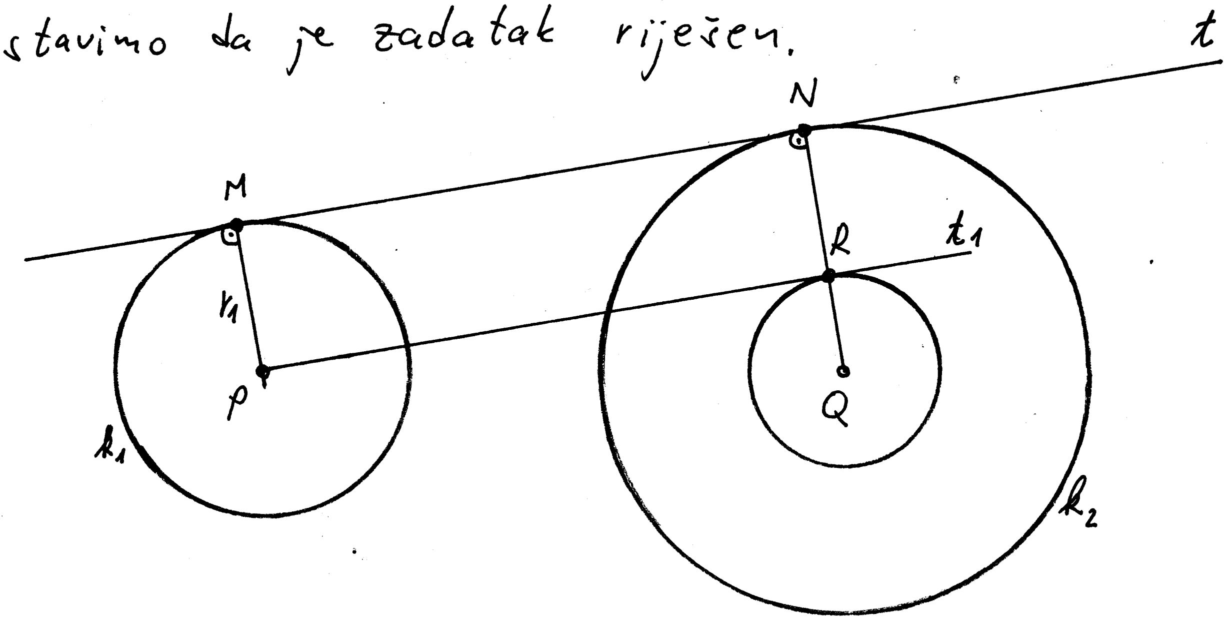
Prave $p(S,E')$ i $p(S,E'')$ ne mogu biti dvije različite prave jer bi tada razdvajali krugove k_1 i k_2 (krugovi ne bi imali zajedničku tačku E) $\Rightarrow p(S,E') \equiv p(S,E'') \Rightarrow$ $\boxed{E' = E'' = E}$

$p(S,E)$ jest tang. na k_1 i na k_2 š.e.d.

(#) Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta ($r_2 > r_1$). Označimo sa M tačku dodira k_1 i t, a sa N tačku dodira k_2 i t.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $t_1 \ni P$ i $t_1 \cap NQ = \{R\}$ $(NQ > PM)$.

Imamo da je $\square PRNM$ paralelogram (preciznije pravougaonik).

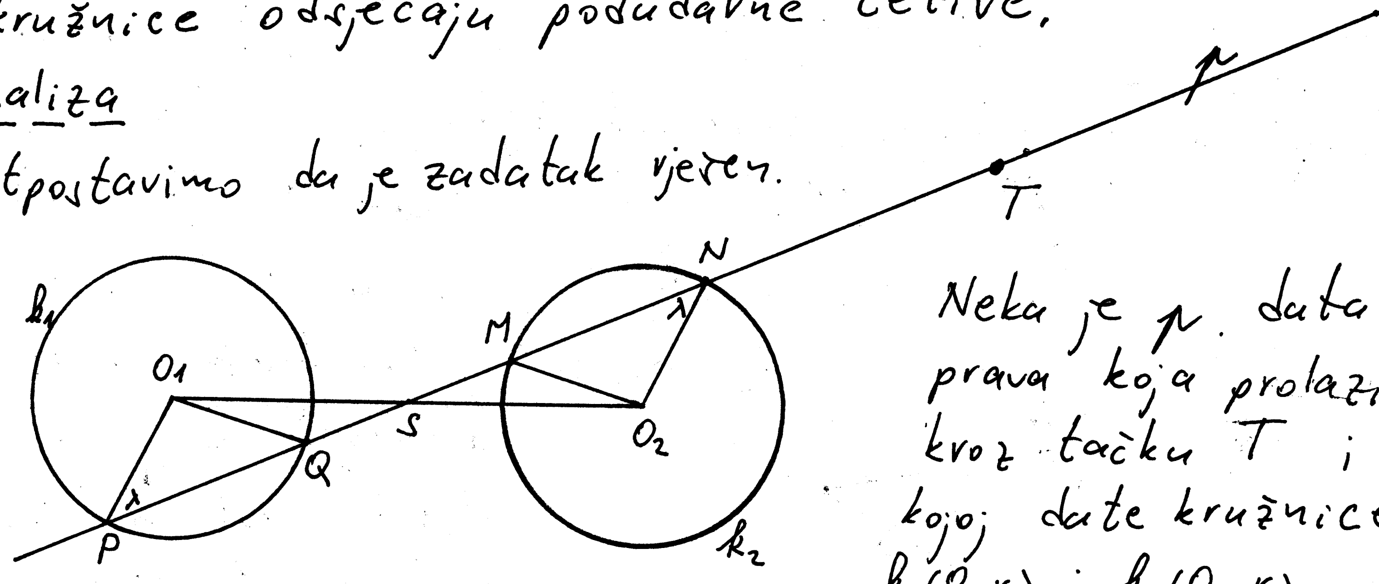
$QR = r_2 - r_1$, pa kako su tačke P i Q date mogu konstruisati tangentu t_1.

Tangenta t je paralelna sa t_1 i udaljena je od t_1 za dužinu r_1, pa je možemo konstruisati.

(#) Date su podudarne kružnice k_1 i k_2 i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsjecaju podudarne tetive.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p data prava koja prolazi kroz tačku T i kojoj date kružnice $k_1(O_1,r)$ i $k_2(O_2,r)$ odsjecaju podudarne tetive PQ i MN.

$\Delta PQO_1 \cong \Delta MO_2N$ (podud. SSS)

$\Downarrow$

$\measuredangle O_1PQ \cong \measuredangle MNO_2 = \lambda$. Neka je $\{S\} = p \cap O_1O_2$.

Sad imamo
$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle O_1SP \cong \measuredangle NSO_2 \text{ (unakrsni)} \\ \measuredangle SPO_1 \cong \measuredangle SNO_2 = \lambda \\ PO_1 \cong NO_2 = r\end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta PSO_1 \cong \Delta NSO_2 \Rightarrow O_1S \cong O_2S.$$

Prema tome S je središte duži O_1O_2 pa pravu p sad nije teško konstruisati.

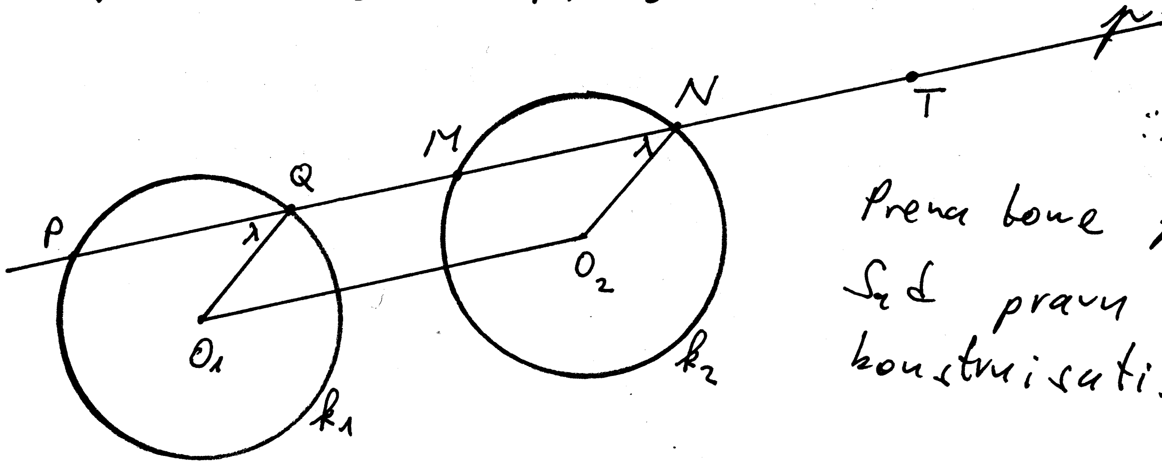
II način

Iz podudarnosti SSS $\Rightarrow$ $\Delta PQO_1 \cong \Delta MNO_2$

$\Downarrow$

$\measuredangle O_1QP \cong \measuredangle O_2NM = \lambda$.

Kako je $O_1Q \cong O_2N$ i $O_1Q \parallel O_2N$ $\Rightarrow$ $\square O_1O_2NQ$ je paralelogram.



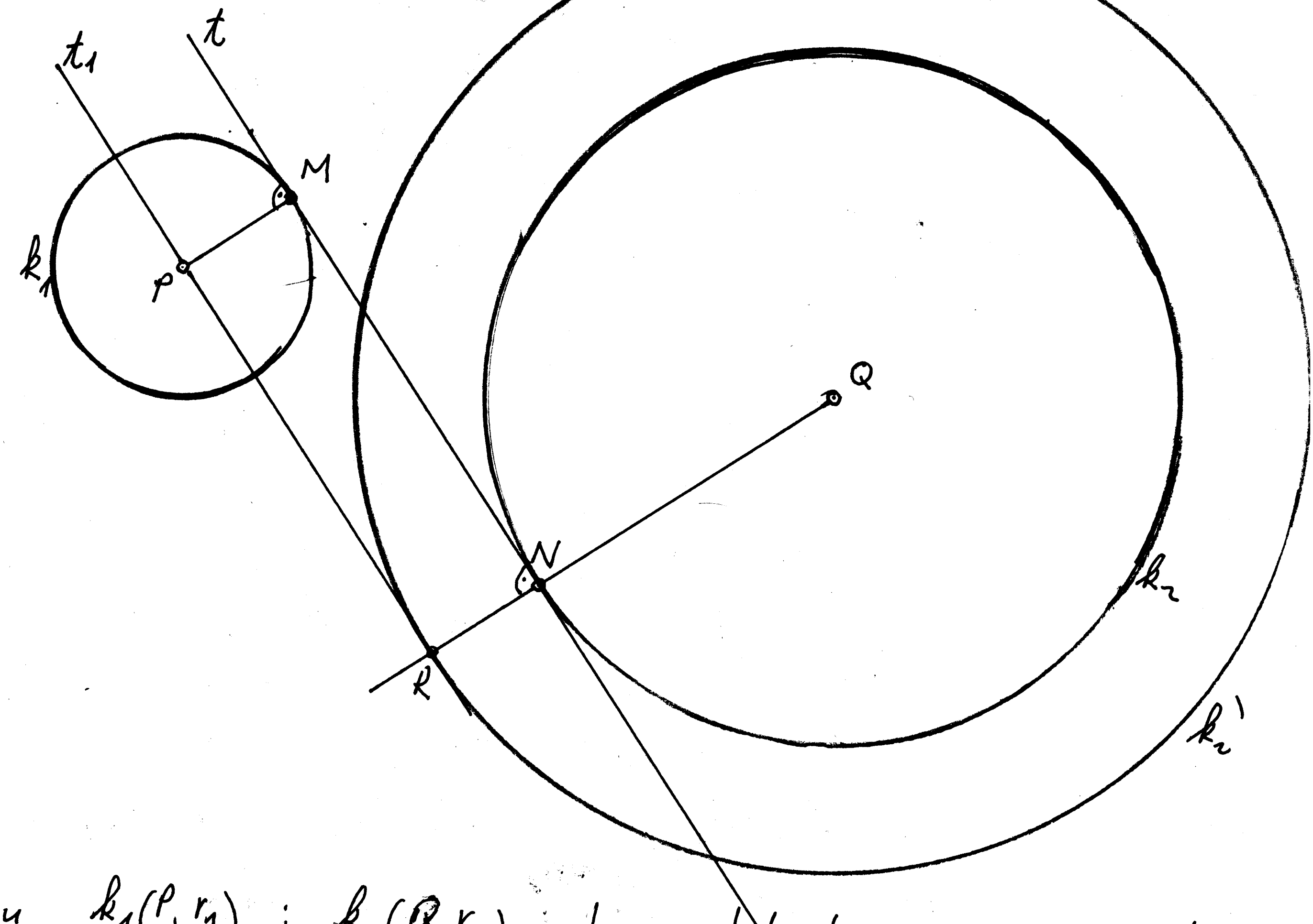
Prema tome $p \parallel O_1O_2$.

Sad pravu p možemo konstruisati.

Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta. Označimo sa M i N tačke dodira tangente t sa k_1 i k_2 redom.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $P \in t_1$ i $t_1 \cap p(Q,N) = \{R\}$: $Q-N-R$.

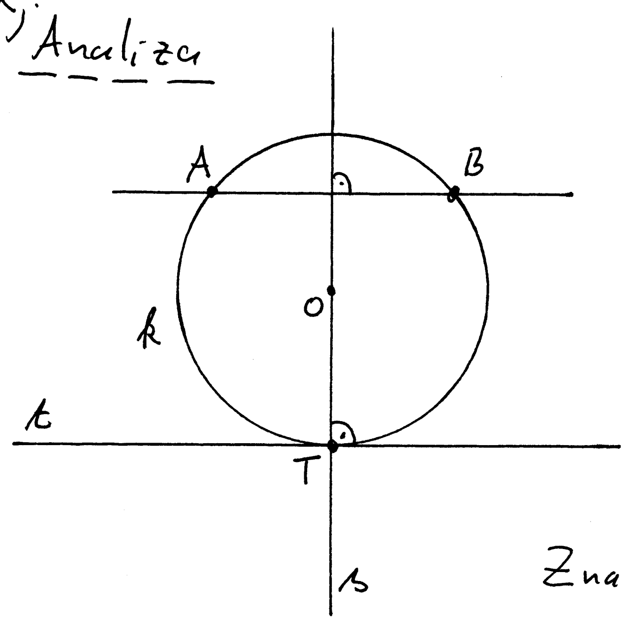
$QR = QN + NR = r_2 + r_1$. Označimo sa $k_2'(Q, QR)$.

Kako kružnicu k_2' mogu konstruisati, to mogu konstruisati i tačku R (tangenta na kružnicu k_2' iz tačke P).

Kako je $PM = NR$, $N \in t$ i $t_1 \parallel t$ to možemo konstruisati i traženu tangentu t.

#) Data je prava t i tačke $A, B \notin t$ takve da $p(A,B) \parallel t$. Konstruisati kružnicu kroz tačke A, B koja dodiruje datu pravu t.

Rj: Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(O,r)$ tražena kružnica koja dodiruje pravu t u tački T i koja prolazi kroz tačke A i B.

Neka je s simetrala duži AB. Tačka $O \in s$ a kako je $p(AB) \parallel t$ to $s \perp t$.

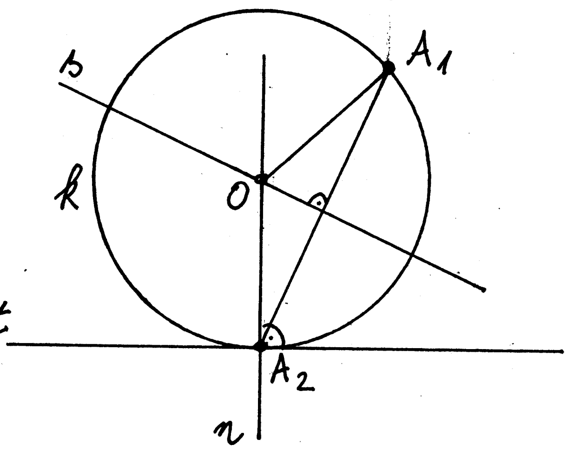
Znamo da je $OT \perp t$ a kako je i $s \perp t$ to je $s \cap t = \{T\}$. Tačka O se nalazi na presjeku simetrala duži AB, AT i BT.

Prema tome kako su date tačke A i B, prava t to nije teško konstruisati simetralu s duži AB, dobiti tačku T a poslije toga i $k(O,r)$.

(#) Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu u datoj tački.

R: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak rješen. Neka je data prava t tačke $A_2 \in t$ i $A_1 \notin t$, i neka je k tražena kružnica.



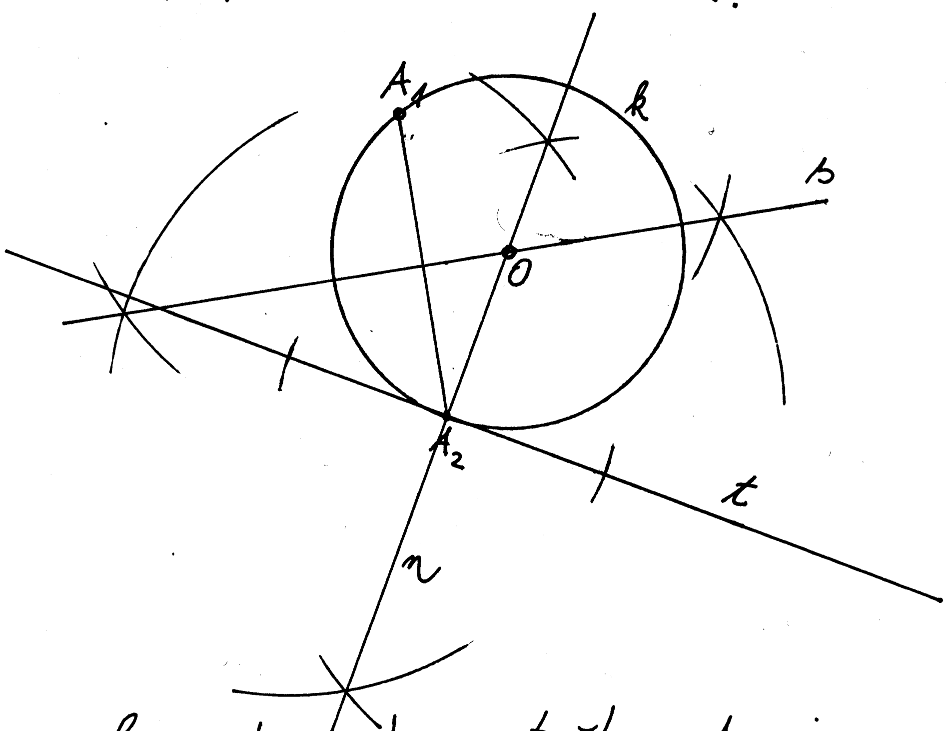
Primjetimo da je $p(O, A_2) \perp t$ gdje je O centar kružnice k i primjetimo da je $\triangle OA_2A_1$ jkk. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $O \in s$ gdje je s simetrala stranice A_1A_2.

Sad kako možemo konstruisati n i s to možemo konstruisati tačku O a time i traženu kružnicu k.

Konstrukcija

1. t, $A_2 \in t$, $A_1 \notin t$
2. pravu n: $n \perp t$ i $A_2 \in n$
3. pravu s, s simetrala A_2A_1
4. $n \cap s = \{O\}$
5. $k(O, OA_2)$



Dokaz

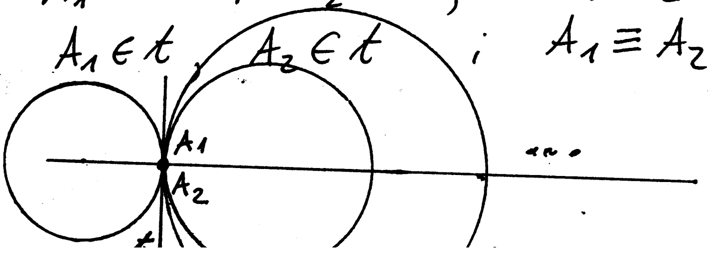
Da konstruisana kružnica k prolazi kroz tačku A_1 i dodiruje pravu t u tački A_2 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Determinacija

Ako je $A_1 \notin t$, $A_2 \in t$ zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje

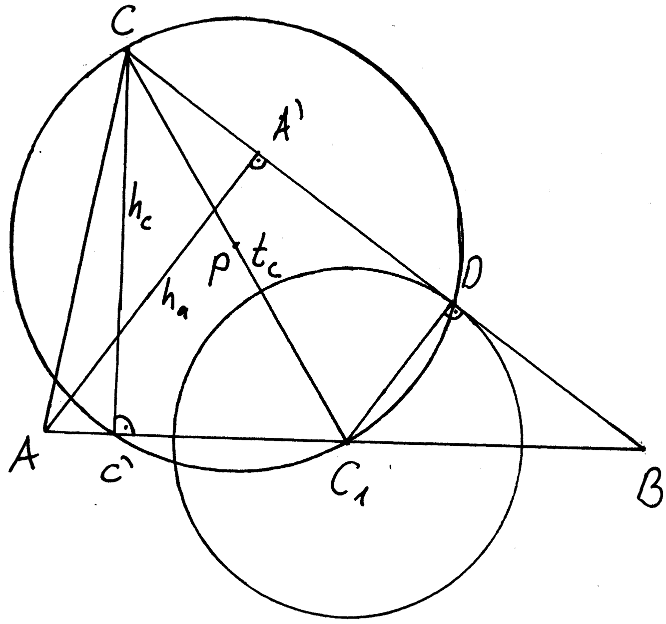
Ako $A_1 \in t$ i $A_2 \in t$, $A_1 \not\equiv A_2$ zadatak nema rješenja

Ako $A_1 \in t$, $A_2 \in t$ i $A_1 \equiv A_2$ zadatak ima ∞ mnogo rješe



(#) Dat je trougao ΔABC u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Na stranici BC data je tačka D takva da $C_1D \perp BC$ i $C_1D = \frac{1}{2} AA'$. Diskutovati da li se tačka D može dobiti kao presjek dva kruga čiji se poluprečnici mogu izraziti preko h_a, h_c ili t_c.

Rješenje:



$AA' = h_a$

Prema pretpostavci zadatka $C_1D = \frac{1}{2} AA' = \frac{1}{2} h_a$,

Prema tome prvi krug može biti $k_1(C_1, \frac{1}{2} h_a)$

Trougao ΔCDC_1 je pravougli pa je centar opisanog kruga tog trougla na sredini težišnice $t_c = CC_1$. Označimo tu tačku sa P.

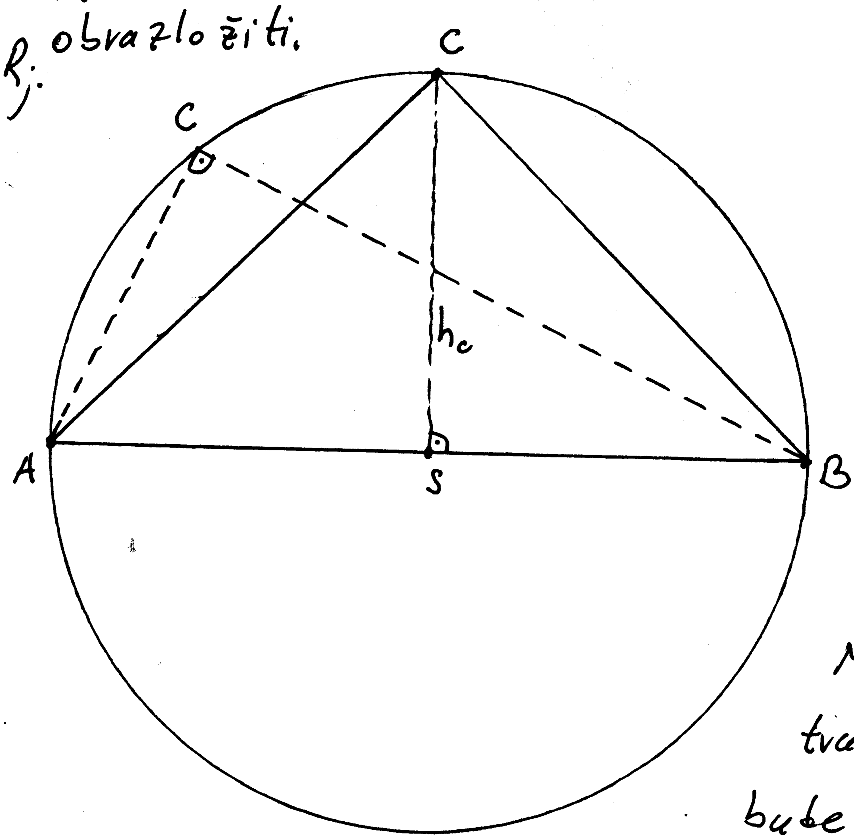
Drugi krug može biti $k_2(P, \frac{1}{2} t_c)$.

Na kraju $\{D\} = k_1(C_1, \frac{1}{2} h_a) \cap k_2(P, \frac{1}{2} t_c)$.

q.e.d.

(#) Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC+BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

Rj.:



Za svaku tačku C na krugu k dobićemo pravougli trougao ΔABC (ugao nad prečnikom je pravi).

Površina pravouglog trougla je $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Možemo primjetiti da problem traženja da zbir duži $AC+BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći,

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot h_c}{2}$$ (h_c - visina spuštena iz vrha C).

Prema tome problem da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja tačke C takve da visina h_c bude najveća.

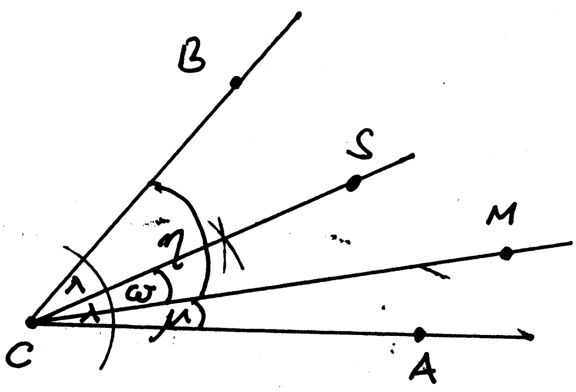
Najveća tetiva u krugu je prečnik kružnice pa naša visina treba da bude dio tog prečnika ili drugačije rečeno naša visina treba da bude poluprečnik CS kruga takav da $CS \perp AB$. Sad nije teško primjetiti da iz podudarnosti SUS slijeda da su ΔASC i ΔBSC podudarni $\Rightarrow AC \cong BC$.

Prema tome, da bi zbir duži $AC+BC$ bio najveći tačku C trebamo izabrati takvu da je $AC \cong BC$.

q.e.d.

#) Zadani su ugao $\measuredangle ACB$, poluprava CM unutar ugla $\measuredangle ACB$ i poluprava CS koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je
$\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB)$.

Rj.



Uvedimo oznake:

$\lambda = \measuredangle ACS \cong \measuredangle SCB$

$\omega = \measuredangle SCM$

$\mu = \measuredangle MCA$ i $\eta = \measuredangle MCB$.

Trebamo pokazati da je

$\omega = \frac{1}{2}(\mu - \eta)$

$\omega = \lambda - \mu$

$\omega = \eta - \lambda$

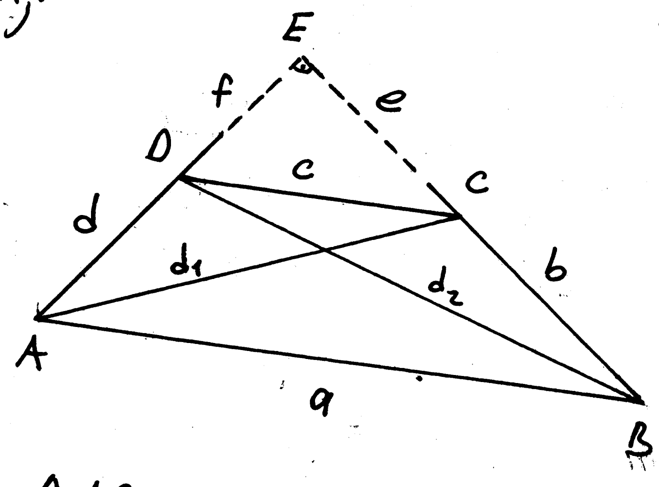
tj.

$$\measuredangle SCM = \measuredangle ACS - \measuredangle MCA$$
$$\measuredangle SCM = \measuredangle MCB - \measuredangle SCB \quad + \ (\measuredangle ACS \cong \measuredangle SCB)$$
$$2\measuredangle SCM = \measuredangle MCB - \measuredangle MCA$$
$$\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCB - \measuredangle MCA)$$

q.e.d.

#) Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

ΔACE je pravougli sa hipotenuzom AC

$d_1^2 = (d+f)^2 + e^2$ ... (1)

ΔBDE je pravougli sa hipotenuzom BD

$d_2^2 = (b+e)^2 + f^2$ ... (2)

ΔABE je pravougli sa hipotenuzom $AB \Rightarrow a^2 = (d+f)^2 + (e+b)^2$

ΔDCE je pravougli sa hipotenuzom $CD \Rightarrow c^2 = e^2 + f^2$

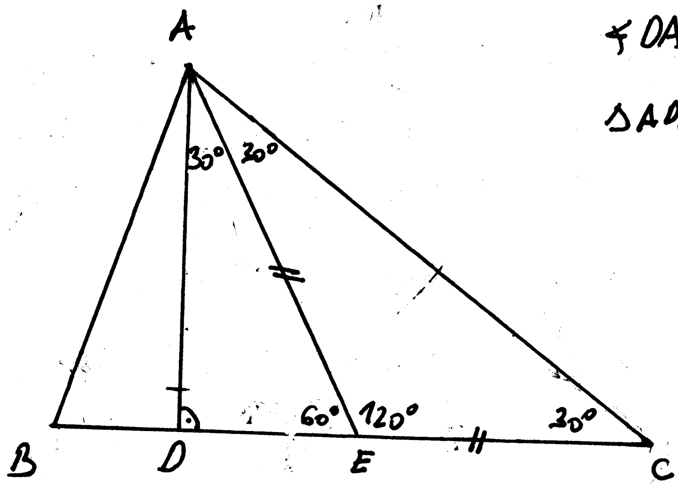
$(1)+(2) \Rightarrow \quad d_1^2 + d_2^2 = (d+f)^2 + e^2 + (b+e)^2 + f^2 = a^2 + c^2$

tj. $\quad d_1^2 + d_2^2 = a^2 + c^2$

q.e.d.

(#) U trouglu $\triangle ABC$ je $AC = BC$, a visina AD sa simetralom AE ($E \in BC$) ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od $30°$. Nađi uglove trougla $\triangle ABC$ i dokazati da je $AE = EC$. Odgovor obrazložiti!

Rj.



$\measuredangle DAE \cong \measuredangle CAE = 30°$

$\triangle ADE$ pravougli $\Rightarrow \measuredangle AEC = 120°$

(vanjski ugao $\triangle ADE$)

$\Rightarrow \measuredangle ACE = 30° \Rightarrow \triangle AEC$ jkk

tj. $AE = EC$

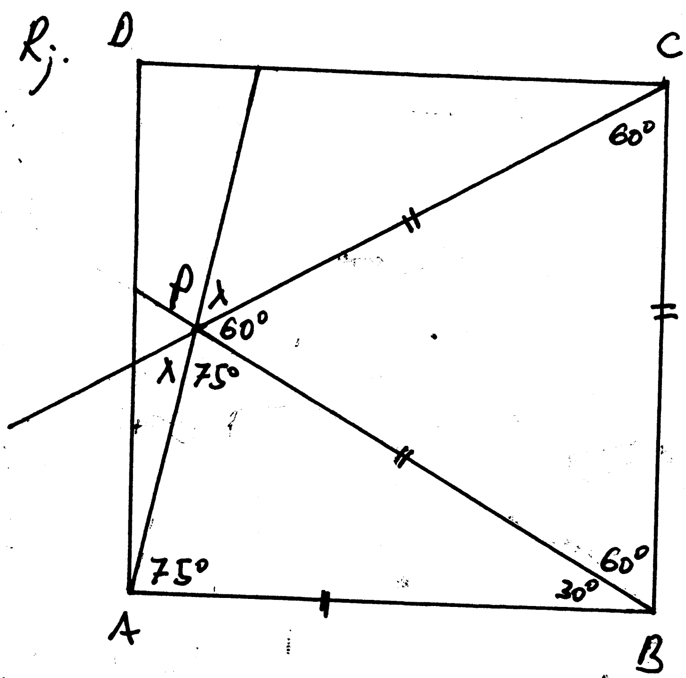
$\triangle ABC$ jkk $\Rightarrow$

$\measuredangle CAB \cong \measuredangle CBA = 75°$

$\alpha = 75°,\ \beta = 75°,\ \gamma = 30°$

(#) Dat je kvadrat $\square ABCD$ i unutar njega je odabrana tačka P tako da je trougao $\triangle BCP$ jednakostraničan. Prava AP siječe stranicu CD u tački E. Odrediti mjerni broj ugla $\measuredangle CPE$. Odgovor obrazložiti!

Rj.



$\triangle BCP$ jkk $\Rightarrow$ ima uglove po $60°$

$\measuredangle ABC = 90° \Rightarrow \measuredangle ABP = 30°$

$AB \cong BP \cong BC \Rightarrow \triangle ABP$ jkk

$\Rightarrow \measuredangle BAP \cong \measuredangle APB = 75°$

$\lambda + 60° + 75° = 180°$

$\lambda = 45°$

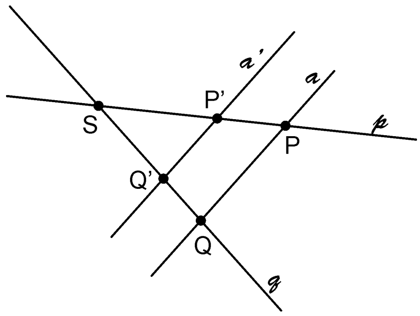
Euklidska geometrija 2

1. Za dva trougla kažemo da su slična akko... Nabrojati četri stava o sličnosti trouglova! O čemu moramo voditi računa kada se pozivamo na sličnost SSU?

2. Kako glasi treći potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni ($AS \cdot CS = ...$, gdje je S...).

3. Ugao između tangente i tetive jednak je peri...

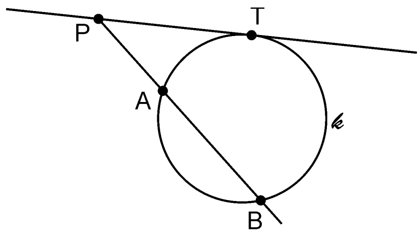
4. Talesova teorema glasi: Neka su... (vidi sliku)... Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave tada vrijedi $\frac{SP}{SP'} = \frac{\square}{\square} = \frac{PQ}{\square}$.



5. Poljedica talesove teoreme: $\frac{SP}{SQ} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{SP'}{PP'} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{SP}{PP'} = \frac{\square}{\square}$ i $\frac{SP'}{P'Q'} = \frac{\square}{\square}$.

6. Obrat Talesove teoreme glasi: $\frac{SP}{SP'} = \frac{\square}{\square} = \frac{PQ}{\square} \Rightarrow a \| a'$.

7. Neka je prava $p(P, T)$ tangenta na krug k. U kakvom su odnosu duži PT, PA i PB sa slike ispod?



8. Neka su date dvije prave koje se sijeku u tački S i koje sijeku krug k u tačkama A, B, C i D. U kakvom su odnosu duži SA, SB, SC i SD sa slike ispod?